Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left(\sqrt{5}-1\right)^2+2\sqrt{5}$ este natural.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(2-x^2\right)=\log_2 x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.

5p **5.** Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.

5p **6.** Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a+b=\dfrac{\pi}{3}$. Arătați că $2\cos b=\cos a+\sqrt{3}\sin a$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p **a)** Calculați $D(-1,2)$.

5p **b)** Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2,q)$ are rangul egal cu 2.

5p **c)** Arătați că există cel puțin o pereche (x,y) de numere reale, cu $x\neq y$, pentru care $D(x,y)=D(y,x)$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f=X^3+X-m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X-1$ să fie egal cu 8.

5p **b)** Arătați că numărul $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este întreg, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

5p **c)** În cazul $m=2$ determinați patru numere întregi a,b,c,d, cu $a>0$, astfel încât polinomul $g=aX^3+bX^2+cX+d$ să aibă rădăcinile $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\dfrac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculați $f'(0)$.

5p **b)** Arătați că, pentru fiecare număr natural $n\geq 2$, ecuația $f(x)=n$ are exact o soluție în intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Fie x_n unica soluție din intervalul $(0,+\infty)$ a ecuației $f(x)=n$, unde n este număr natural, $n\geq 2$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=\dfrac{\pi}{2}$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței S.

5p **b)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^n(kx)\,dx=\int_0^{2\pi} f^n(x)\,dx$, pentru orice numere naturale $n,k\geq 1$.