

**Examenul de bacalaureat național 2019  
Proba E. c)**

**Matematică M\_mate-info**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fractiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b> $\frac{3}{x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1=1 \text{ sau } x+1=3$ Elementele mulțimii $M$ sunt 0 și 2	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>2.</b> $x_1^2 - 1 = mx_1, x_2^2 - 1 = mx_2$ , pentru orice număr real $m$ $\frac{mx_1}{x_1} + \frac{mx_2}{x_2} = 2$ , deci $m=1$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>3.</b> $\sqrt{2-x} = x \Rightarrow 2-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ $x=-2$ , care nu convine sau $x=1$ , care convine	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>4.</b> În mulțimea $A$ sunt 20 de numere, deci sunt 20 de cazuri posibile Pentru $n \leq 20$ , obținem $\log_2 n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$ , deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	<b>1p</b>  <b>2p</b>  <b>2p</b>
<b>5.</b> $m_{MP} = -1$ , deci panta mediatoarei segmentului $MP$ este $m=1$ $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ este mijlocul lui $MP$ , deci ecuația mediatoarei este $y - \frac{3}{2} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + 1$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>6.</b> $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $BC = 10$	<b>3p</b>  <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b> $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 0 + (-4) + 0 - 0 - (-6) - (-1) = 3$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>b)</b> $\det(M(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & m & -1 \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4m^2 + m + 3$ , pentru orice număr real $m$ $\det(M(m)) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$ sau $m = 1$ , deci sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}, 1\}$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b> Pentru $m=1$ , sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt $(3-2\alpha, 1-\alpha, \alpha)$ , unde $\alpha \in \mathbb{C}$ $4(1-\alpha)^2 = (3-\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha = -1$ sau $\alpha = \frac{5}{3}$ , deci soluțiile sunt $(5, 2, -1)$ sau $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$	<b>3p</b>  <b>2p</b>

2.a)	$x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4} + \frac{6}{4} =$ $= \frac{1}{3}x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
b)	$x * x = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}, \quad x * x * x = \frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}$ $\frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} = x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ sau } x = \frac{3}{2} \text{ sau } x = \frac{9}{2}$	2p 3p
c)	$x * \frac{9}{2} = \frac{9}{2} * x = x, \text{ pentru orice număr real } x, \text{ deci } e = \frac{9}{2} \text{ este elementul neutru al legii ,,*''}$ $n * n' = n' * n = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4nn' - 6n - 6n' = 27, \text{ unde } n' \text{ este simetricul lui } n \text{ și, cum pentru } n, n' \in \mathbb{N}, \text{ numărul } 4nn' - 6n - 6n' \text{ este par, obținem că nu există niciun număr natural } n \text{ al cărui simetric în raport cu legea de compozitie ,,*'' să fie număr natural}$	2p 3p

## **SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} =$ $= \frac{x^2-x}{x^2+x+1} = \frac{x(x-1)}{x^2+x+1}, \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției <math>f</math> în punctul <math>(a, f(a))</math> este paralelă cu dreapta de ecuație <math>y = -\frac{1}{7}x + 2 \Leftrightarrow f'(a) = -\frac{1}{7}</math></p> $\frac{a(a-1)}{a^2+a+1} = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow 8a^2 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \text{ sau } a = \frac{1}{2}$	2p 3p
c)	<p><math>f</math> continuă pe <math>\mathbb{R}</math>, <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty</math>, <math>f(0) = 0</math>, <math>f(1) = 1 - \ln 3 \in (-1, 0)</math></p> <p><math>f</math> este strict descrescătoare pe <math>(0, 1)</math> și <math>f</math> este strict crescătoare pe <math>(1, +\infty)</math>, deci, pentru fiecare <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, ecuația <math>f(x) + n = 0</math> nu are nicio soluție în <math>[0, +\infty)</math></p> <p><math>f</math> este strict crescătoare pe <math>(-\infty, 0)</math> ⇒ pentru fiecare <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, ecuația <math>f(x) + n = 0</math> are soluție unică în <math>(-\infty, 0)</math>, deci pentru fiecare <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, ecuația <math>f(x) + n = 0</math> are soluție unică</p>	3p 1p 1p
2.a)	$\int_0^2 e^x f(x) dx = \int_0^2 e^x \cdot \frac{x}{e^x} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$ $= 2 - 0 = 2$	3p 2p
b)	$\mathcal{A} = \int_{-1}^1  f(x)  dx = \int_{-1}^0 -xe^{-x} dx + \int_0^1 xe^{-x} dx = (x+1)e^{-x} \Big _{-1}^0 - (x+1)e^{-x} \Big _0^1 =$ $= 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$	3p 2p
c)	$(n+2)I_n = (n+2) \int_0^1 x^n f(x) dx = (n+2) \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = \int_0^1 (x^{n+2})' e^{-x} dx = \frac{1}{e} + \int_0^1 x^{n+2} e^{-x} dx$ $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot x^{n+2} \leq x^{n+2} e^{-x} \leq x^{n+2} \Rightarrow \frac{1}{e} \int_0^1 x^{n+2} dx \leq \int_0^1 x^{n+2} e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^{n+2} dx$ <p>Cum <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} = 0</math>, obținem <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+2} e^{-x} dx = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)I_n = \frac{1}{e}</math></p>	2p 1p 2p