

CONCURSUL NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR /CATEDRELOR DECLARATE
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

17 iulie 2019

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $a_4 = a_1 + 3r$, deci $a_1 + 3(\sqrt{2} - 1) = 3\sqrt{2}$ $a_1 = 3$	3p 2p
	b) $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 36\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{9(2a_1 + 8r)}{2} = 36\sqrt{2}$, deci $a_1 + 4r = 4\sqrt{2} \Rightarrow a_4 + r = 4\sqrt{2}$ $r = \sqrt{2}$	3p 2p
	c) Presupunem, prin reducere la absurd, că există doi termeni raționali a_p și a_q , cu $p \neq q$, deci $a_p = a_4 + (p-4)r$ și $a_q = a_4 + (q-4)r$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$ $(q-4)a_p = (q-4)a_4 + (q-4)(p-4)r$ și $(p-4)a_q = (p-4)a_4 + (p-4)(q-4)r$, de unde obținem $a_4 = \frac{(q-4)a_p - (p-4)a_q}{q-p}$, deci $a_4 \in \mathbb{Q}$, ceea ce este o contradicție	2p 3p
2.	a) $BE \perp AC \Rightarrow \triangle ABE$ este dreptunghic, deci $\cos(\sphericalangle BAE) = \frac{AE}{AB}$ și, cum $\sphericalangle BAE$ are măsura de 60° , obținem $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ $CF \perp AB \Rightarrow \triangle AFC$ este dreptunghic, deci $\cos(\sphericalangle CAF) = \frac{AF}{AC}$ și, cum $\sphericalangle CAF$ are măsura de 60° , obținem $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2} = \frac{AE}{AB}$	2p 3p
	b) $\sphericalangle BHF \equiv \sphericalangle CHE$ și, cum $\triangle BHF$ este dreptunghic în F și $\triangle CHE$ este dreptunghic în E , obținem $\triangle BHF \sim \triangle CHE$ $\frac{BH}{CH} = \frac{HF}{HE}$, deci $BH \cdot HE = CH \cdot HF$	3p 2p
	c) P aparține mediatoarei segmentului BH , deci $BP = PH$ și Q aparține mediatoarei segmentului CH , deci $CQ = HQ$, deci $BP + CQ = PH + HQ$ $\sphericalangle BHF$ și $\sphericalangle CHE$ au măsura de 60° și, cum $\sphericalangle BHP$ are măsura de 30° și $\sphericalangle CHQ$ are măsura de 30° , obținem că $(HP$ și HQ sunt bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf, deci sunt semidrepte opuse	1p 3p
	P, H și Q sunt coliniare în această ordine, deci $PH + HQ = PQ$, de unde $BP + CQ = PQ$	1p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) Polinomul f se divide cu polinomul $X + a \Leftrightarrow f(-a) = 0$ $-a^3 + a^3 - a + 1 = 0$, deci $a = 1$	3p
	b) $f = (X^2 + 1)(X + 1)$, deci $x_1 = -1$, $x_2 = i$ și $x_3 = -i$ $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = -1$ și $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (-1)^3 + i^3 + (-i)^3 = -1 \Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$	3p
	c) $x_1 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ și $(p, q) = 1$, cum $a \in \mathbb{Z}$, obținem $p 1$ și $q 1$, deci $x_1 = -1$ sau $x_1 = 1$ $x_1 = -1 \Leftrightarrow a = 1$; $x_1 = 1 \Leftrightarrow a = -3$	3p
2.	a) $f'(x) = x' \arctg(x^2 + 1) + x \cdot \frac{(x^2 + 1)'}{1 + (x^2 + 1)^2} =$ $= 1 \cdot \arctg(x^2 + 1) + x \cdot \frac{2x}{1 + (x^2 + 1)^2} = \arctg(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{1 + (x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
	b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x^2 + 1) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(x^2 + 1) - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{1 + (x^2 + 1)^2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = \frac{\pi}{2} x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
	c) $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + 1)' \arctg(x^2 + 1) dx = \frac{x^2 + 1}{2} \arctg(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) \frac{(x^2 + 1)'}{1 + (x^2 + 1)^2} dx =$ $= \frac{x^2 + 1}{2} \arctg(x^2 + 1) - \frac{1}{4} \ln(1 + (x^2 + 1)^2) + C \Rightarrow F(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \arctg(x^2 + 1) - \frac{1}{4} \ln(1 + (x^2 + 1)^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$ $F(0) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 + c \Rightarrow c = \frac{1}{4} \ln 2$, deci $F(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \arctg(x^2 + 1) - \frac{1}{4} \ln(1 + (x^2 + 1)^2) + \frac{1}{4} \ln 2$	3p
		2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	2p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p
<i>Itemul de tip pereche elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	2p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p
<i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	1p
- respectarea formatului itemului	1p

- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	2p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p
<i>Itemul de completare elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	2p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	2p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor evaluate	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	2p
- corectitudinea științifică a informației de specialitate	1p