Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ este egală cu 30. Determinați a_2.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$. Arătați că $(f\circ f)(3)=9$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6)=6-\log_2(x+6)$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD. Arătați că $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=2\sqrt{3}$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $B=\frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 4 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4 \\ ax+4y+z=6 \\ x-y+az=1 \end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.
5p	**c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.
5p	**c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ și punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=8x-12$. Demonstraţi că $b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^2+4\right) f(x)\,dx=-\dfrac{11}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\int_1^2 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.