

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $a = (4 + 3i)^2 + (3 - 4i)^2$ este natural, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației $x^2 - 11x + m = 0$ sunt numere reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(7x) + \log_x 7 = 3$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -2)$, $B(-4, 4)$ și $C(-4, 0)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p** 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 - a \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3) \cdot X = A(5)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 3x - 3y + 6$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 14$.
- 5p** c) Determinați numărul natural n , știind că $\left(2^n + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+1} + \frac{3}{2}\right) * \left(2^{n+2} + \frac{3}{2}\right) = 2^{20} + \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-2(3x^2 - 3x + 1)}{x^3(x-1)^3}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0, 3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(2) + f(3) + \dots + f(n))^{n^2}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)} dx = 1$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)} dt = x$.