

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $2z - z^2 = 2$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2m$, unde m este număr real. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m , știind că $f(x) > 0$ pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(\sqrt{x} + 1) + \log_5(\sqrt{x} - 1) = 2$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,5)$ și $C(6,1)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$.
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x - \cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(2)) = 8$.
- 5p b) Demonstrați că $A(a)A(b) = 2A(ab - a - b + 2)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q) = 4I_3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -\frac{3}{5}xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $x * y = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} \geq \frac{5}{3}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Calculați $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * \dots * \frac{2020}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - \ln(x^2 + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.
2. Se consideră funcția $f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{74}{3}$.

5p b) Calculați $\int_{-3}^3 |x f(x)| dx$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton.