**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Test 5**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 3i$ și $z_2 = 5 - 6i$. Arătați că $2z_1 - z_2 = 1$. |
| **5p** | **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 15$. Determinați numărul real $m$ pentru care $f(m) + f(m+1) = 35$. |
| **5p** | **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$. |
| **5p** | **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de $25$. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(6,4)$, $B(-2,6)$. Determinați numerele reale $a$ și $b$, știind că, dacă $C(a,b)$, atunci $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. |
| **5p** | **6.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$, cu $AB = 4$. Știind că aria $\Delta ABC$ este egală cu $6$, calculați lungimea laturii $BC$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 2x + (a+1)y + az = 3 \\ ax + 6y + 4z = a + 3 \end{cases}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-4)$, pentru orice număr real $a$. |
| **5p** | **b)** Arătați că **nu** există niciun număr real $a$ pentru care $(A(4) - A(1))\cdot A(a) = A(a)\cdot(A(4) - A(1))$. |
| **5p** | **c)** Determinați numerele întregi $a$, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică $(x_0, y_0, z_0)$ cu $x_0$, $y_0$ și $z_0$ numere întregi. |
| | **2.** Pe mulțimea $M = (-10,10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \dfrac{100(x+y)}{xy+100}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $3 * 0 = 3$. |
| **5p** | **b)** Se consideră $f: M \to (0,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x*y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x,\ y \in M$. |
| **5p** | **c)** Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{\text{de } 11 \text{ ori } x} = 0$. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2 - 4x + 1\right)$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x) = e^x(x-3)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției $f$, în care tangenta la graficul funcției $f$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020$. |
| **5p** | **c)** Determinați valorile reale ale lui $a$, știind că graficul funcției $f$ intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact trei puncte. |

**2.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$.

**5p** **a)** Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

**5p** **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>e$, știind că $\displaystyle\int_e^{a}\ln x\,dx=2a$.