Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 20$. Determinaţi numerele reale a, știind că $f(a) = a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x = \dfrac{1}{5^{3x}}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,1)$ și $C(1,0)$. Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = A + xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(M(1)) = 0$.

5p **b)** Demonstraţi că $M(x)M(y) = M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x = y$.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M(m^2+1)M(n^2) = M(n^2)M(m^2+1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$.

5p **a)** Arătaţi că $x \circ y = 7\left(x+\dfrac{1}{7}\right)\left(y+\dfrac{1}{7}\right)-\dfrac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x = 5$.

5p **c)** Dați exemplu de numere distincte $a,b \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care numărul $a \circ b$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \dfrac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{x-2}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e f'(x)\,dx = 1$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real p, $p > 1$, știind că $\displaystyle\int_1^p x f(x)\,dx = \frac{p^2}{2}\ln p - \frac{3}{4}$.