Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 4$ și $a_2 = 7$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 1 = 0$. Arătați că $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} = \frac{1}{8}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$ și $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 1$.

5p **b)** Determinați numărul real x, pentru care $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n, n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$. Determinați numărul natural n, știind că punctele M, N și P sunt coliniare.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 7xy + 7x + 7y + 6$.

5p **a)** Arătați că $x * y = 7(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x = x$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a * b * c = 48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2017}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{4}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f, știind că $F(1) = \frac{\pi}{4} + 1$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 5$.