

Examenul de bacalaureat național 2020  
Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*  
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 3

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2z - z^2 = 2(1+i) - (1+i)^2 =$ $= 2 + 2i - (1 + 2i + i^2) = 2 + 2i - 2i = 2$	2p 3p
2.	$\Delta = m^2 - 8m$ $f(x) > 0$ pentru orice număr real $x$ , deci $\Delta < 0$ , de unde obținem $m \in (0, 8)$	2p 3p
3.	$\log_5 \left( (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) \right) = 2 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 - 1 = 5^2$ $x = 26$ , care convine	3p 2p
4.	O mulțime cu $n$ elemente are $2^n$ submulțimi $2^n = 32$ , deci $n = 5$	2p 3p
5.	$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD} \Rightarrow ABDC$ paralelogram, deci segmentele $AD$ și $BC$ au același mijloc Coordonatele punctului $D$ sunt $x = 8$ și $y = 5$	3p 2p
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\cos x - \sin x = \sin x - \cos x \Leftrightarrow \cos x = \sin x$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , obținem $x = \frac{\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$	3p 2p
b)	$A(a)A(b) = \begin{pmatrix} 4 - 2a - 2b + 2ab & 0 & 2a + 2b - 2ab \\ 0 & 4 & 0 \\ 2a + 2b - 2ab & 0 & 4 - 2a - 2b + 2ab \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} ab - a - b + 2 & 0 & 2 - (ab - a - b + 2) \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 - (ab - a - b + 2) & 0 & ab - a - b + 2 \end{pmatrix} = 2A(ab - a - b + 2)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	3p 2p
c)	$A(pq - p - q + 2) = 2I_3 \Leftrightarrow A(pq - p - q + 2) = A(2) \Leftrightarrow pq - p - q = 0$ <p>Cum <math>p</math> și <math>q</math> sunt numere întregi, din <math>(p-1)(q-1) = 1</math>, obținem <math>p = 0, q = 0</math> sau <math>p = 2, q = 2</math></p>	2p 3p

<b>2.a)</b>	$x * y = -\frac{3}{5}xy + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}x + y = -\frac{3}{5}x\left(y - \frac{5}{3}\right) + y - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} =$ $= \left(y - \frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x + 1\right) + \frac{5}{3} = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(y - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$\frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} = -\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{3} - \frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3x} - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3} = \frac{5(x-1)^2}{3x} + \frac{5}{3}, x \in (0, +\infty)$ $x > 0 \Rightarrow \frac{5(x-1)^2}{3x} \geq 0, \text{ deci } \frac{5x}{3} * \frac{5}{3x} \geq \frac{5}{3}, \text{ pentru orice } x \in (0, +\infty)$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>c)</b>	$x * \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \text{ și } \frac{5}{3} * y = \frac{5}{3}, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale}$ $\frac{1}{3} * \frac{2}{3} * \frac{3}{3} * \dots * \frac{2020}{3} = \left(\left(\frac{1}{3} * \dots * \frac{4}{3}\right) * \frac{5}{3}\right) * \left(\frac{6}{3} * \dots * \frac{2020}{3}\right) = \frac{5}{3} * \left(\frac{6}{3} * \dots * \frac{2020}{3}\right) = \frac{5}{3}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = 4 - \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x =$ $= \frac{4x^2 + 4 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{2(2x^2 - x + 2)}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \ln \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1}\right) =$ $= 4 - \ln 1 = 4$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>c)</b>	$f'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ este strict crescătoare pe } \mathbb{R}, \text{ deci } f \text{ este injectivă}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ și } f \text{ este continuă pe } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ este surjectivă, deci } f$ <p>este bijectivă</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (25 - x^2) dx = \left(25x - \frac{x^3}{3}\right) \Big _0^1 =$ $= 25 - \frac{1}{3} = \frac{74}{3}$	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$\int_{-3}^3  xf(x)  dx = -\int_{-3}^0 x\sqrt{25-x^2} dx + \int_0^3 x\sqrt{25-x^2} dx =$ $= \frac{1}{3} (25-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big _{-3}^0 - \frac{1}{3} (25-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big _0^3 = \frac{125}{3} - \frac{64}{3} - \frac{64}{3} + \frac{125}{3} = \frac{122}{3}$	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<b>c)</b>	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^{n+1}(x)} dx - \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(25-x^2)^n}} \left(\frac{1}{\sqrt{25-x^2}} - 1\right) dx$ $\frac{1}{\sqrt{(25-x^2)^n}} > 0 \text{ și } \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} - 1 < 0, \text{ pentru orice } x \in [0,1] \Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0, \text{ pentru orice}$ <p>număr natural nenul <math>n</math>, deci șirul <math>(I_n)_{n \geq 1}</math> este descrescător</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>