

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2z_1 - z_2 = 2(3 - 3i) - (5 - 6i) =$ $= 6 - 6i - 5 + 6i = 1$	2p 3p
2.	$m + 15 + (m + 1) + 15 = 35$ $2m + 31 = 35 \Rightarrow m = 2$	2p 3p
3.	$3^x(2 - 3) + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 27$ $x = 3$	3p 2p
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile Numerele naturale de trei cifre care sunt multipli de 25 sunt $25 \cdot 4, 25 \cdot 5, \dots, 25 \cdot 39$, deci sunt 36 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{36}{900} = \frac{1}{25}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{AC} = \overline{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB $a = 2, b = 5$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow 6 = \frac{4 \cdot AC}{2} \Rightarrow AC = 3$ $BC = 5$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{vmatrix} = 8a + 8 + 12 + 2a^2 - a^2 - a - 12a - 16 =$ $= a^2 - 5a + 4 = (a - 1)(a - 4)$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$A(4) - A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(A(4) - A(1))A(a) = 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+2 & a+7 & a+4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real $A(a)(A(4) - A(1)) = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & a+1 & a+1 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, deci $A(a)(A(4) - A(1)) \neq (A(4) - A(1))A(a)$, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	Sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) , deci $a \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 4\}$ și soluția sistemului de ecuații este $\left(\frac{a-3}{a-4}, \frac{a-6}{a-4}, -\frac{a-6}{a-4}\right)$ Cum x_0, y_0, z_0 și a sunt numere întregi, obținem $a = 3$ sau $a = 5$, care convin	3p 2p

2.a)	$3 * 0 = \frac{100(3+0)}{3 \cdot 0 + 100} =$ $= \frac{300}{100} = 3$	3p
		2p
b)	$f(x * y) = \frac{10 - \frac{100(x+y)}{xy+100}}{10 + \frac{100(x+y)}{xy+100}} = \frac{10xy - 100x - 100y + 1000}{10xy + 100x + 100y + 1000} = \frac{xy - 10x - 10y + 100}{xy + 10x + 10y + 100} =$ $= \frac{(x-10)(y-10)}{(x+10)(y+10)} = \frac{10-x}{10+x} \cdot \frac{10-y}{10+y} = f(x)f(y), \text{ pentru orice } x, y \in M$	3p
		2p
c)	$f\left(\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 11 ori } x}\right) = f(0), \text{ deci } \underbrace{f(x)f(x)\dots f(x)}_{\text{de 11 ori } f(x)} = f(0) \Leftrightarrow (f(x))^{11} = 1$ $f(x) = 1 \Leftrightarrow 10 - x = 10 + x, \text{ deci } x = 0, \text{ care convine}$	3p
		2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 1) + e^x(2x - 4) =$ $= e^x(x^2 - 2x - 3) = e^x(x-3)(x+1), x \in \mathbb{R}$	3p
		2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$</p> $e^{x_0}(x_0 - 3)(x_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ sau } x_0 = 3$	2p
		3p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, f(-1) = \frac{6}{e}, f(3) = -2e^3 \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ <p>Cum f este continuă pe \mathbb{R} și f este strict monotonă pe $(-\infty, -1)$, pe $(-1, 3)$ și pe $(3, +\infty)$, graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact trei puncte</p> $\Leftrightarrow f(x) = a \text{ are exact trei soluții reale } \Leftrightarrow a \in \left(0, \frac{6}{e}\right) \cap \left(-2e^3, \frac{6}{e}\right) \cap \left(-2e^3, +\infty\right) = \left(0, \frac{6}{e}\right)$	2p
		3p
2.a)	$F : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ este o primitivă a funcției } f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \ln x + \frac{1}{\ln x}, x \in (1, +\infty)$ $F'(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (1, +\infty), \text{ deci } F \text{ este strict crescătoare pe intervalul } (1, +\infty)$	2p
		3p
b)	$\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (f(x) - \ln x) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx = \ln(\ln x) \Big _e^{e^2} =$ $= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$	3p
		2p
c)	$\int_e^a \ln x dx = x \ln x \Big _e^a - \int_e^a x \cdot \frac{1}{x} dx = a \ln a - e - (a - e) = a \ln a - a$ $a \ln a - a = 2a \Leftrightarrow a(\ln a - 3) = 0 \text{ și, cum } a > e, \text{ obținem } a = e^3$	3p
		2p