

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_mate-info**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Test 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$z = 1 + 2i\sqrt{3} + 3i^2 - (1 - 2i\sqrt{3} + 3i^2) = 4i\sqrt{3}$ Partea reală a lui $z$ este 0	<b>3p</b> <b>2p</b>
2.	$f(3) < 0, f(4) < 0, f(5) < 0$ $f(0) > 0, f(1) > 0$ și $f(2) > 0$ , deci $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) \cdot f(5) < 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
3.	$(\log_2 x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \log_2 x = 1$ $x = 2$ , care convine	<b>3p</b> <b>2p</b>
4.	Numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui $A$ , care conțin exact 2 numere impare este egal cu $C_5^2 \cdot C_5^1 =$ $= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 50$	<b>3p</b> <b>2p</b>
5.	$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CA} =$ $= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
6.	$1 - 2\sin^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{3}$ Cum $x \in (\pi, 2\pi)$ , obținem $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$ $= 10 + 6 + 4 - 4 - 4 - 15 = -3$	<b>2p</b> <b>3p</b>
b)	Sistemul de ecuații devine $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ 3x - y + 2z = 1 \quad \text{și, cum } \det(A(-1)) = 3 \neq 0, \text{ sistemul de ecuații} \\ 2x - y + 5z = -2 \end{cases}$ este compatibil determinat $x = -3, y = -14, z = -2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
c)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & 2 \\ 3 & a & 2 \\ 2 & a & 5 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -3a$ , pentru orice număr real $a$ și, cum $\det(A(a)) = 0$ , obtinem $a = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & b \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ și $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & b \end{vmatrix} = 0$ , deci $38 - 2b = 0$ , de unde obtinem $b = 19$	<b>2p</b> <b>3p</b>

<b>2.a)</b> $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1} =$ $= \sqrt{x^2 (y^2 - 1) - (y^2 - 1) + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}, \text{ pentru orice } x, y \in G$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b> $x * e = x \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)(e^2 - 1) + 1} = x \Leftrightarrow (x^2 - 1)(e^2 - 1) = x^2 - 1, \text{ pentru orice } x \in G, \text{ deci}$ $e^2 - 1 = 1 \text{ și, cum } e \in G, \text{ obținem } e = \sqrt{2}$ $\text{Cum } \sqrt{2} * x = \sqrt{(2-1)(x^2-1)+1} = \sqrt{x^2} = x, \text{ pentru orice } x \in G, \text{ obținem că } e = \sqrt{2} \text{ este elementul neutru al legii de compoziție ,,*”}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b> $f(x) * f(y) = \sqrt{(f^2(x) - 1)(f^2(y) - 1) + 1} = \sqrt{(x+1-1)(y+1-1) + 1} = \sqrt{xy + 1} = f(xy),$ <p style="margin-left: 20px;">pentru orice <math>x, y \in M</math>, deci <math>f</math> este un morfism de la grupul <math>(M, \cdot)</math> la grupul <math>(G, *)</math></p> <p style="margin-left: 20px;"><math>f</math> este continuă, <math>f</math> este strict crescătoare pe <math>(0, +\infty)</math>, <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1</math> și <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty</math>, deci <math>f</math> este bijectivă <math>\Rightarrow f</math> este un izomorfism de la grupul <math>(M, \cdot)</math> la grupul <math>(G, *)</math></p>	<b>3p</b>  <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

<b>1.a)</b> $f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+1)e^{-x} \cdot (-1) =$ $= (1 - (x+1))e^{-x} = -xe^{-x}, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b> $\frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n} = \left( \frac{(n+1)e^{-n}}{e(n+2)e^{-(n+1)}} \right)^n = \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n, \text{ pentru orice număr natural } n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(f(n))^n}{e^n (f(n+1))^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n+2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{-1}{n+2} \right)^{\frac{n+2}{-1}} \right)^{\frac{-n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b> $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x+1)e^{-x}) = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = 0$ <p style="margin-left: 20px;">Cum <math>f</math> este continuă pe <math>\mathbb{R}</math>, <math>f</math> este strict crescătoare pe <math>(-\infty, 0)</math>, <math>f(0) = 1</math> și <math>f</math> este strict descrescătoare pe <math>(0, +\infty)</math>, ecuația <math>f(x) = m</math> are două soluții reale distințe <math>\Leftrightarrow m \in (0, 1)</math></p>	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>2.a)</b> $\int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx = 2 \ln(x+1) \Big _0^1 =$ $= 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b> $\int_1^e \left( f(x) - \frac{2}{x+1} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b> $F$ este primitivă a lui $f$ și $F(0) = 0$ , deci $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \ln(x+1)$ $\int_0^1 2f(x)F(x) dx = \int_0^1 2F(x)F'(x) dx = F^2(x) \Big _0^1 = \frac{1}{4} + 2 \ln 2 + 4 \ln^2 2$ $\frac{1}{4} + 2 \ln 2 + 4 \ln^2 2 = \frac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a \Leftrightarrow 4 \ln^2 2 = \ln^2 a, \text{ deci } \ln a = -2 \ln 2 \text{ sau } \ln a = 2 \ln 2, \text{ de}$ <p style="margin-left: 20px;">unde obținem <math>a = \frac{1}{4}</math> sau <math>a = 4</math>, care convin</p>	<b>1p</b>  <b>2p</b>  <b>2p</b>