

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = (3 + 2i)(3 - 2i) - (4 - i) = 3^2 - (2i)^2 - 4 + i = 9 + i$ Partea reală a numărului complex z este egală cu 9	2p 3p
2.	$g(2) = 1$ $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$	2p 3p
3.	$\frac{6x}{2^3} = 2^4 \Leftrightarrow 2x = 4$ $x = 2$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor un număr impar are $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ de elemente, deci sunt 125 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{125}{900} = \frac{5}{36}$	2p 2p 1p
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos(\sphericalangle ADC) \Rightarrow AC = 2\sqrt{19}$	2p 3p
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic în A $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 48$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $= -3 + 0 + 2 - 4 - (-6) - 0 = 1$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = 3a - 2$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ nu este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) = 0$, deci $a = \frac{2}{3}$	2p 3p
c)	Dacă $a = \frac{2}{3}$, sistemul de ecuații este incompatibil Dacă $a \neq \frac{2}{3}$, atunci $\det(A(a)) \neq 0$, deci sistemul de ecuații este compatibil determinat și, cum există y_0 și z_0 astfel încât $(2, y_0, z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații, obținem $\frac{2(2a+1)}{3a-2} = 2$ $a = 3$, care convine	1p 3p 1p

2.a)	$2 * 64 = \sqrt[3]{2^{\log_2 64}} =$ $= \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$	3p 2p
b)	$x * y = \sqrt[3]{x^{\log_2 y}} = x^{\frac{1}{3} \log_2 y} = (2^{\log_2 x})^{\frac{1}{3} \log_2 y} = 2^{\frac{1}{3} \log_2 x \log_2 y} =$ $= 2^{\frac{1}{3} \log_2 y \log_2 x} = (2^{\log_2 y})^{\frac{1}{3} \log_2 x} = y^{\frac{1}{3} \log_2 x} = y * x$, pentru orice $x, y \in G$, deci legea de compoziție „*” este comutativă	2p 3p
c)	$x * 8 = 8 * x = x$, pentru orice $x \in G \Rightarrow e = 8$ este elementul neutru al legii de compoziție „*” $x * x = 8 \Leftrightarrow x^{\log_2 x} = 8^3 \Leftrightarrow \log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 (8^3) \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = 9$ $\log_2 x = -3$ sau $\log_2 x = 3$, deci $x = \frac{1}{8}$ sau $x = 8$, care convin	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x-4)(x-3)(x-2) + (x-5)((x-4)(x-3)(x-2))'$, $x \in \mathbb{R}$ $f'(5) = (5-4)(5-3)(5-2) + 0 = 6$	3p 2p
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1} = \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)} = \frac{n-1}{n-5}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{n-5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{4}{n-5} \right)^{\frac{n-5}{4}} \right)^{\frac{4n}{n-5}} = e^4$	2p 3p
c)	$f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = 1$ f este derivabilă, deci, conform teoremei lui Rolle pe $[2,3]$, $[3,4]$ și $[4,5]$, ecuația $f'(x) = 0$ are o soluție reală în fiecare dintre intervalele $(2,3)$, $(3,4)$ și $(4,5)$	2p 3p
2.a)	$g(x) = (1+e^x)f(x) = 1-e^x \Rightarrow \int g(x)dx = x - e^x + C \Rightarrow G(x) = x - e^x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$ $G(0) = 0$, deci $c = 1$, de unde obținem $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = x - e^x + 1$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2e^x}{1+e^x} \right) dx = \left(x - 2 \ln(1+e^x) \right) \Big _0^1 =$ $= 1 - 2 \ln(1+e) + 2 \ln 2 = 1 + 2 \ln \frac{2}{e+1}$	3p 2p
c)	$\int_{-1}^1 f(x) \cos x dx = \int_{-1}^{-1} f(-x) \cos(-x) \cdot (-1) dx = \int_{-1}^1 f(-x) \cos x dx = \int_{-1}^1 \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \cos x dx =$ $= \int_{-1}^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \cos x dx = - \int_{-1}^1 \frac{1-e^x}{e^x + 1} \cos x dx = - \int_{-1}^1 f(x) \cos x dx$ $2 \int_{-1}^1 f(x) \cos x dx = 0$, deci $\int_{-1}^1 f(x) \cos x dx = 0$	3p 2p