

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt{7}(\sqrt{6}+1) - \sqrt{6}(\sqrt{7}+1) = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 2$. Demonstrați că $f(x+1) - f(x) = g(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui M care au cel puțin trei elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ și $D(-3, 2)$. Determinați ecuația dreptei MN , știind că segmentul MN este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.
- 5p 6. Calculați $\sin 2x$, știind că $(2 \sin x + \cos x)^2 = 2 + 3 \sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$, unde $i^2 = -1$ și a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = i$.
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real a , matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p c) Calculați $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3^{x+y} - 3^{x+1} - 3^{y+1} + 12$.
- 5p a) Arătați că $x * 1 = 3$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $0 * x = -9$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $x * y = 3$, atunci $(x-1)(y-1) = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln(x^2 + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n , ecuația $f(x) = n$ are două soluții reale distincte.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{e^x} dx = 1$.

5p b) Arătați că $\int_1^2 x^3 f(x^2) dx = \frac{e(e-1)(e^2+e+1)}{2}$.

5p c) Demonstrați că $\int_1^e f(x) dx + \int_1^e e^x \ln x dx = e^e$.