

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $N = (\sqrt{5} + \sqrt{13})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{13})^2$ este pătratul unui număr natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că $(f \circ f)(1) + f(1) = 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 4^{1-x} = 4$.
- 5p 4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $A = \{0, 5, 7\}$.
- 5p 5. Se consideră punctul G , centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M , mijlocul segmentului AG . Demonstrați că $6\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.
- 5p 6. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC , știind că $4\mathcal{A}_{ABC} = AB \cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -15$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.
- 5p c) Demonstrați că matricea $M = A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2020}$.
- 5p a) Arătați că $x * (-x) = \sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $(x+1) * (-x) = \sqrt[3]{2021}$.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , există un unic număr real x pentru care $x * x * x = a$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x^2+3x+5} dx = 4$.

5p b) Calculați $\int_{-4}^1 f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = 6 - 2\sqrt{5}$.