Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, pentru care $z = 3\overline{z}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că numerele $f(0)$, $f(2)$ și $f(1)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(-x) = \log_3\left(x^2 - 2x - 2\right)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0,1,2,\ldots,9\}$, pătratul acestui număr să aparțină mulțimii A.

5p **5.** Se consideră punctele A, B, C și D, astfel încât $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Demonstrați că $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $BC = R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a)) = 1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Se consideră matricea $B(a) = A(a) - I_3$, unde a este număr real. Demonstrați că, pentru orice număr real a, $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = O_3$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suma elementelor matricei X pentru care $A(2) \cdot X = A(1) + A(2) + \ldots + A(n)$ este egală cu 21.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 + 4xy + y^2$.

5p **a)** Arătați că $1 * 2 = 13$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x * x) * x^2 = 61$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right)^x$.

5p **c)** Demonstrați că $x^5 + 2\sqrt{x^{10} + 3} \geq 3$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 \left(f(x)-x^2\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$.