Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$	**2p**
	Cum $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, obținem că $\log_2 16 < \sqrt[3]{125}$	**3p**
2.	$\Delta = (a+2)^2 - 4(2a+1) = a^2 - 4a$, unde a este număr real	**2p**
	Graficul funcției f este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$, deci $a = 0$ sau $a = 4$	**3p**
3.	$x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$	**3p**
	$x = 1$ sau $x = 3$	**2p**
4.	$C_4^1 = 4$, $A_4^2 = 12$ și $A_5^2 = 20$	**3p**
	$12 = \frac{4+20}{2}$, deci C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**
5.	$m_{AB} = \frac{a-1}{2}$, $m_{BC} = \frac{a+1}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	A, B și C sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow 3a - 3 = 2a + 2$, deci $a = 5$	**3p**
6.	$\sin P = \frac{1}{2}$	**2p**
	$2R = \frac{MN}{\sin P} \Rightarrow R = 16$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -1 + 1 + (-1) - 1 - 1 - 1 = -4$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = -a(a^2+3)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R}^*$	**3p**
c)	Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție și $x_0 = y_0 = z_0$, atunci $\begin{cases} x_0 + ax_0 - x_0 = a \\ x_0 - x_0 - ax_0 = -1 \\ ax_0 - x_0 + x_0 = -1 \end{cases}$, unde a este număr real	**2p**
	Obținem $ax_0 = 1$ și $ax_0 = -1$, ceea ce este imposibil	**3p**
2.a)	$2020 * (-2020) = \sqrt[3]{2020^3 + (-2020)^3 + 8} = \sqrt[3]{2020^3 - 2020^3 + 8} =$	**3p**
	$= \sqrt[3]{8} = 2$	**2p**
b)	$x * e = x$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt[3]{x^3 + e^3 + 8} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 + 8 = x^3 \Leftrightarrow e = -2$	**3p**
	Cum $(-2) * x = \sqrt[3]{(-2)^3 + x^3 + 8} = \sqrt[3]{x^3} = x$, pentru orice număr real x, obținem că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**

c)	$f(x*y)=(x*y)^3+8=\left(\sqrt[3]{x^3+y^3+8}\right)^3+8=x^3+y^3+8+8=$	**2p**
	$=x^3+8+y^3+8=f(x)+f(y)$, pentru orice numere reale x și y, deci f este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x+4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$f'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+4)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $(-2,+\infty)$	**2p**
c)	f este continuă, f este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$, $f(-1)=\frac{4}{3}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $f(x)\in\left(0,\frac{4}{3}\right]$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\in\mathbb{Z}$, deci $f(x)=1\Leftrightarrow x^2+4x+2=0$ și, cum $x\in[-1,+\infty)$, obținem $x=-2+\sqrt{2}$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\frac{x+1}{f(x)}dx=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=e^2-e^0=e^2-1$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx=\int_0^1(x+1)^2e^x\,dx=\left(x^2+1\right)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e-e^0=2e-1$	**2p**
c)	$\frac{f(x)}{x+1}=e^{-x}$, $x\in(0,+\infty)\Rightarrow 1-\int_0^a\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-a}$, $1-\int_0^b\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-b}$, $1-\int_0^c\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-c}$	**3p**
	e^{-a}, e^{-b} și e^{-c} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow\left(e^{-b}\right)^2=e^{-a}\cdot e^{-c}$, deci $e^{-2b}=e^{-a-c}$, de unde obținem $2b=a+c$, adică a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**