Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3^2=(a-1)(a+7)\Leftrightarrow a^2+6a-16=0$	**3p**
	Cum a este număr real, $a>1$, obținem $a=2$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-6=-x-3\Leftrightarrow x^2+x-3=0$	**3p**
	Cum $\Delta>0$, suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g este -1	**2p**
3.	$3^x\left(3^2-1\right)=8\Leftrightarrow 3^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}\le 3n\Leftrightarrow n(n-7)\le 0$ și, cum $n\in A$, obținem $n\in\{2,3,4,5,6,7\}$, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	**1p**
5.	$\frac{4}{m-2}=\frac{m}{2}\Rightarrow m^2-2m-8=0$	**2p**
	$m=-2$ sau $m=4$, care convin	**3p**
6.	$\cos A=\frac{1}{2}$ și $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$, deci $BC=\sqrt{21}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=9+\sqrt{21}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{cases}-\left(m^2-1\right)+4=1\\ -1+1=0\\ -m+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2=4\\ m=2\end{cases}$	**3p**
	$m=2$	**2p**
b)	Matricea sistemului de ecuații este $A=\begin{pmatrix}m^2-1 & m & 4\\ 1 & 1 & 1\\ m & 3 & 1\end{pmatrix}$ și $\det A=-(m+7)(m-2)$, pentru orice număr real m	**3p**
	Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow\det A\ne 0$, deci $m\in\mathbb{R}\setminus\{-7,2\}$	**2p**
c)	$m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}\Rightarrow\det A\ne 0$ și sistemul de ecuații are soluția unică $\left(\frac{1}{m+7},-\frac{m+3}{m+7},\frac{m+2}{m+7}\right)$	**3p**
	Cum $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, numerele $\frac{1}{m+7}$, $-\frac{m+3}{m+7}$ și $\frac{m+2}{m+7}$ sunt întregi $\Leftrightarrow m=-8$ sau $m=-6$	**2p**

2.a)	$x \circ y = 11xy + x + y + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} = 11x\left(y + \frac{1}{11}\right) + \left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} =$	**3p**
	$= \left(y + \frac{1}{11}\right)(11x+1) - \frac{1}{11} = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$11\left(x + \frac{1}{11}\right)^2 - \frac{1}{11} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{11}\right)^2 = \frac{9}{121}$	**3p**
	$x = -\frac{4}{11}$ sau $x = \frac{2}{11}$	**2p**
c)	$a = 11^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{11} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} = 11^3 \cdot 1 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{11} - \frac{1}{11} = 720 - \frac{1}{11}$	**3p**
	$719 < 720 - \frac{1}{11} < 720$, deci partea întreagă a numărului a este egală cu 719	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right)' =$	**3p**
	$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{x} - 1$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$f'(1) = 0$, $f(1) = -\frac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = -\frac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(1) = 0$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0,1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$	**2p**
	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq f(1) \Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x \geq -\frac{1}{3}$, de unde obținem $x\left(2\sqrt{x} - 3\right) \geq -1$	**3p**
2.a)	$g(x) = x^3$, $x \in (-1, +\infty)$, deci $G(x) = \frac{x^4}{4} + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**3p**
	Cum $G(0) = 2020$, obținem $c = 2020$, deci $G(x) = \frac{x^4}{4} + 2020$	**2p**
b)	$\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \left(x - \ln(x+1)\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - \ln 2$	**2p**
c)	$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1} \leq x^n$, pentru orice număr natural nenul n și orice $x \in [0,1]$	**3p**
	$\int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 x^n\, dx$ și, cum $\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$, obținem $\int_0^1 f_n(x)dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**