Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinaţi suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=5$ și rația $r=2$.
5p	**2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2-ax+a-1=0$ are soluții reale distincte.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3-\sqrt[3]{x^2+x+2}=1$.
5p	**4.** Calculaţi $2C_4^3-3A_4^2$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+\left(a^2+1\right)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=8$, $BC=8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $M(x,y)=xI_2+yA$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x,y)\cdot M(a,b)=M(xa+yb,xb+ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.
5p	**c)** Determinați perechile (x,y) de numere reale, știind că $\det\left(M(x,y)\right)=4$ și suma elementelor matricei $M(x,y)\cdot M(x,y)$ este egală cu 8.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ și $x\circ y=xy-x-y+2$.
5p	**a)** Arătați că $2\circ(1*3)=(2\circ 1)*(2\circ 3)$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $3^{x\circ x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x*x}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $(x-1)*(2y+1)=2$ și $(x+y)\circ 4=10$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.
5p	**a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a>1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(1,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+x+1$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2x}{2x}$.
5p	**a)** Demonstraţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^4 g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)\,dx=20$.