Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care numerele $a-1$, 3 și $a+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Determinați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}-3^x-8=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2\le 3C_n^1$.

5p **5.** Determinați numerele reale m, $m\ne 2$, pentru care vectorii $\vec{u}=4\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}(m^2-1)x+my+4z=1\\ x+y+z=0\\ mx+3y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1,0,1)$ este soluție a sistemului de ecuații.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numerele $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+11xy$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=11\left(x+\frac{1}{11}\right)\left(y+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=\frac{8}{11}$.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $a=\left(1-\frac{1}{11}\right)\circ\left(1-\frac{2}{11}\right)\circ\left(1-\frac{3}{11}\right)\circ\left(1-\frac{4}{11}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\sqrt{x}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\ge -1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră funcția $f_n:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x^n+1}$.

5p **a)** Determinați primitiva $G:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^3+1)f_3(x)$, știind că $G(0)=2020$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.