Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)=-\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, astfel încât $f(x)+f(-x)=2020$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{1-x}=4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cuprins între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6**. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 2, 3 şi 4. Arătaţi că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=\det\left(A+I_2\right)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A\cdot A\cdot A=aI_2$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\neq n$, pentru care $\det\left(A+mI_2\right)=\det\left(A+nI_2\right)$.

2. Pe mulțimea $M=(0,1)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{1-x-y+2xy}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătați că $g'(x)+g(x)=\dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f''(x)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x\,dx = e^2 + a$.