Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul a_2 al unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 6$. Arătați că numărul $f(3)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x) = 3 - \log_5(24-x)$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u} - \vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului înscris în acest triunghi.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 5-a & 10 \\ -2 & -4-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A(a)\cdot A(a) = A(0)$.

5p **c)** Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1)\cdot X = A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 3x - 2y + 1$.

5p **a)** Arătați că $5 * 8 = 0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $2020^x * 2020^x = 2$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(-a, f(-a))$ sunt paralele.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + 2\ln(2x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - 2\ln(2x+1)\right)dx = \frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Dacă F este o primitivă a funcției f, arătați că $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.