**Examenul de bacalaureat național 2020**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_șt-nat***

**Test 14**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătați că numerele $\sqrt{11}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$. Demonstrați că funcția $f$ este impară.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x+2^x=\frac{3}{4}$.

**5p** **4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate cu $3$ elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-1,2)$. Determinați ecuația dreptei $AD$, știind că $ABCD$ este paralelogram.

**5p** **6**. Triunghiul $ABC$ are $AB=10$ și $AC=5$. Arătați că $\sin C=2\sin B$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\ -2x-3y=1\\ 2x+4y+az=-2\end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(a))=a+2$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **b)** Pentru $a=0$, determinați inversa matricei $A(a)$.

**5p** **c)** Pentru $a\neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+2)(y+2)-2$.

**5p** **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice număr real $x$.

**5p** **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x-10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $x$, astfel încât $x*x*x=23$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstrați că axa $Ox$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că imaginea funcției $f$ este intervalul $(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=\frac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

**5p** **a)** Arătați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

**5p** **b)** Calculați $\int_1^2 (x+1)f(x)\,dx$.

**5p** **c)** Determinați numărul real $a$, $a>1$, astfel încât $\int_1^a f(x)\,dx=\frac{1}{2}-\ln\frac{a+1}{2}$.