

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(2 + 3i)^2 = i(5i + 12)$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$. Determinați numărul real a , astfel încât $(f \circ f)(x) = f(x + 1)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5 \cdot 2^{x+1} \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x$.
- 5p 4. Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, care au proprietatea $f(1) \geq 3$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy , se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1, 3)$ și $C(-2, 4)$. Determinați panta dreptei BD .
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = 6^x$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numărul real x , știind că $A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x)$.
- 5p c) Demonstrați că, orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are două elemente numere iraționale.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 + xy + y^2$.
- 5p a) Arătați că $x \circ x \geq 0$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Se consideră numerele reale a și b cu $a \neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x \circ a = x \circ b$.
- 5p c) Determinați numărul real x cu proprietatea că $x \circ (x + 1) = -x^3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - (x + 1)\ln(x + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 1 - \ln(x + 1)$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este concavă.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} - e$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 xf(x) dx$.
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x)) dx$. Demonstrați că $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.