

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{7}\}$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + a$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2bx + 1$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b , știind că parabolele asociate celor două funcții au același vârf.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$.
- 5p 4. Arătați că **nu** există nicio mulțime finită care să aibă exact 12 submulțimi cu 2 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și $C(5,0)$. Arătați că punctul $H(4,7)$ este ortocentrul triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați $\cos x$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $2(\cos^4 x - \sin^4 x) = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Arătați că matricea $I_3 - \frac{1}{11}A$ este inversa matricei B .
- 5p c) Dați exemplul de trei matrice $U, V, T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de rang 1, astfel încât $U + V + T = B$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + a$, unde a este număr real.
- 5p a) Determinați numărul real a pentru care $(-1) * 1 = 0$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „ $*$ ” admite element neutru.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $a \in [12, +\infty)$, atunci mulțimea $[3, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$, $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} + f'(1) + f'(2) + \dots + f'(n) \right)^{\sqrt{n}}$.
- 5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Demonstrați că $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{\pi}{8}$.

5p c) Se consideră primitiva F a lui f pentru care $F(1) = 0$. Calculați $\int_0^1 F(x) dx$.