Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1+3-2\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$	**2p**
	Cum a și b sunt numere raționale $4-\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\Leftrightarrow a=4$ și $b=-1$	**3p**
2.	$f(2020)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}$	**2p**
	$f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1}\Rightarrow f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}+\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1}=\frac{3\left(2020^2+1\right)}{2020^2+1}=3$	**3p**
3.	$2^{2x}-2^{2x+3}=-7\Leftrightarrow 2^{2x}\left(1-2^3\right)=-7\Leftrightarrow 2^{2x}=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Sunt $3^3=27$ de funcţii $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$	**2p**
	Deoarece numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ pentru care $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\neq 0$ este egal cu $2^3=8$, obținem că numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$ este egal cu $27-8=19$	**3p**
5.	$AD\parallel BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}$, deci $m_{AD}=1$	**3p**
	Ecuația dreptei AD este $y-3=1\cdot(x+1)$, deci $y=x+4$	**2p**
6.	$\text{tg}\, 2x=-1$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci $2x=\frac{7\pi}{4}$	**3p**
	$x=\frac{7\pi}{8}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+12-(-2)-(-3)-0=18$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right)\neq 0$	**2p**
	$\det\left(A(a)\right)=a+17$, deci $\det\left(A(a)\right)\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-17\}$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, obținem $\det\left(A(1)\right)=18\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
	Soluția sistemului de ecuații este $(1,1,1)$	**3p**
2.a)	$2*\frac{1}{2}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+1=$	**3p**
	$=2-2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$	**2p**

b)	$a*x=a \Leftrightarrow 2ax-a-x+1=a \Leftrightarrow (2a-1)(x-1)=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$a=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f(x*y)=2(x*y)-1=2(2xy-x-y+1)-1=4xy-2x-2y+2-1=$	**3p**
	$=4xy-2x-2y+1=(2x-1)(2y-1)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\ln\left(2^x+1\right)\right)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{2^x+1}\cdot\left(2^x+1\right)'=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$0<\frac{2^x}{2^x+1}<1$, pentru orice număr real x și $0<\ln 2<1$, deci $\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}<1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f'(x)=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}>0$, pentru orice număr real x, deci f este crescătoare	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(2^x+1\right)}{x}\right)=1-0=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(2^x+1\right)\right)=-\ln 1=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+2)\sin x}{x+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=$	**3p**
	$=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1$	**2p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)(\cos x)'\,dx=-(x+2)\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=$	**3p**
	$=-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\cos\frac{\pi}{2}+(0+2)\cos 0+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=2+\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=3$	**2p**
c)	$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\sin^2 x}{f^2(x)}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\sin^2 x}{(x+2)^2\sin^2 x}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{(x+2)^2}dx=-\frac{1}{x+2}\Big\vert_{\frac{1}{n}}^{1}=-\frac{1}{3}+\frac{n}{2n+1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
	$-\frac{1}{3}+\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{9}$, deci $n=4$, care convine	**2p**