

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați partea întreagă a numărului $2 + 3\sqrt{5}$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$ și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2 + x$. Arătați că $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{3}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul G , centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overline{BM} = \frac{1}{4}\overline{BA}$ și $\overline{CN} = \frac{2}{5}\overline{CA}$. Arătați că punctele M , N și G sunt coliniare.
- 5p** 6. Arătați că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A = 1 - BC^2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(a)) = 4$, pentru orice număr real a .
- 5p** b) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = 2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = 2^n A(x)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y - 7$.
- 5p** a) Arătați că $5 \circ 2 = 0$.
- 5p** b) Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7 + \log_7 x$. Arătați că $f(x) \circ f(y) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Demonstrați că $a^2 \circ b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x}(x-5)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^{2x}(2x-9)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p** c) Arătați că $e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x \in (-\infty, 5)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1} dx = 2$.

5p b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$.

5p c) Determinați $a \in (1, +\infty)$ astfel încât $\int_0^x f(e^t) dt = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} + 1}) + \ln(a - 1)$, pentru orice număr real x .