Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că diferența numerelor $5+2\sqrt{3}$ și $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ este număr întreg.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^2+2x$. Determinați numerele reale m, pentru care $f(m)=g(m)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+5x+1}=\sqrt{2x+5}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\{-2,-1,1,2,3\}$, acesta să verifice inegalitatea $\lvert a+1\rvert\geq 2$.
5p	**5.** Se consideră A, B, C și D patru puncte coplanare, M mijlocul segmentului AD și N mijlocul segmentului BC. Arătați că $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.
5p	**6**. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 1. Arătați că $4\sin A\cdot\sin B=AC\cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a+1 & a-1\\ b & b-2\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că, dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\left(-1,\sqrt{2}\right)\cdot X=A(0,0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy+x+y$.
5p	**a)** Arătați că $1\circ 4=25$.
5p	**b)** Demonstrați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Se consideră dreapta d, asimptota spre $+\infty$ la graficul lui f. Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cos x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}\,dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$.