

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numerele raționale a și b , știind că $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = a + b\sqrt{2}$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$. Arătați că $f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = 3$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 4^{\frac{2x+3}{2}} = -7$.
- 5p 4. Determinați numărul de funcții $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ cu proprietatea că $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ și $C(-4, -2)$. Determinați ecuația dreptei AD .
- 5p 6. Determinați $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, știind că $\operatorname{tg} 2x = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + 3z = 4 \\ 2x - y + az = 2 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 18$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p c) Pentru $a = 1$, rezolvați sistemul de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - x - y + 1$.
- 5p a) Arătați că $2 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Determinați numărul real a , astfel încât $a * x = a$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Demonstrați că $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este crescătoare.
- 5p c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\sin x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = 1$.

5p b) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p c) Determinați numărul natural n , $n \geq 2$, pentru care $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \frac{1}{9}$.