

CONCURSUL NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR /CATEDRELOR DECLARATE
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

2020

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de numere reale, cu termenul $a_4 = 3\sqrt{2}$.
- 5p a) Arătați că, dacă rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este egală cu $\sqrt{2} - 1$, atunci $a_1 = 3$.
- 5p b) Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 36\sqrt{2}$.
- 5p c) Demonstrați că progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ conține cel mult un termen rațional.
2. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB < AC$ și unghiul A are măsura de 60° . Înălțimile BE , $E \in AC$ și CF , $F \in AB$ ale triunghiului ABC se intersectează în punctul H . Mediatoarea segmentului BH intersectează latura AB în P și mediatoarea segmentului CH intersectează latura AC în Q .
- 5p a) Arătați că $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Demonstrați că $BH \cdot HE = CH \cdot HF$.
- 5p c) Demonstrați că $BP + CQ = PQ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră (G, \circ) un grup cu elementul neutru e , $f: G \rightarrow G$ și $g: G \rightarrow G$ morfisme de la grupul (G, \circ) la grupul (G, \circ) .
- 5p a) Arătați că, dacă $f(x) = x^{-1}$, pentru orice $x \in G$, unde x^{-1} este simetricul elementului x în grupul (G, \circ) , atunci grupul (G, \circ) este comutativ.
- 5p b) Demonstrați că mulțimea $M = \{x \in G \mid g(x) = e\}$ este subgrup al grupului (G, \circ) .
- 5p c) Se consideră $H \neq G$ un subgrup al lui (G, \circ) . Demonstrați că, dacă $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in G \setminus H$, atunci $f(x) = g(x)$, pentru orice $x \in H$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg}(x^2 + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \operatorname{arctg}(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{1 + (x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră $I_n = n^\alpha \int_0^1 x^n f(x) dx$, unde α este un număr real. Determinați numărul real α pentru care limita șirului $(I_n)_{n \geq 1}$ este un număr real nenul.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a IX-a (3 ore).

| Competențe specifice | Conținuturi |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. Recunoașterea corespondenței dintre seturi de date și reprezentări grafice2. Reprezentarea grafică a unor date diverse în vederea comparării variației lor3. Aplicarea formulelor de calcul și a lecturii grafice pentru rezolvarea de ecuații, inecuații și sisteme de ecuații4. Exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiții algebrice; exprimarea prin condiții algebrice a unor reprezentări grafice5. Determinarea unor relații între condiții algebrice date și graficul funcției de gradul al II-lea6. Utilizarea monotoniei și a punctelor de extrem în optimizarea rezultatelor unor probleme practice | <p>Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea</p> <ul style="list-style-type: none">• <i>Monotonie; punct de extrem (vârful parabolei), interpretare geometrică</i>• <i>Poziționarea parabolei față de axa Ox, semnul funcției, inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq, <, >$), $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, interpretare geometrică</i>• <i>Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma</i> $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}, \text{ cu } a, b, c, m, n \in \mathbb{R},$ <i>interpretare geometrică</i> |

(Programa școlară de matematică, OMECI nr. 5099/09.09.2009)

În vederea evaluării formării/dezvoltării competențelor specifice din secvența dată, elaborați 6 itemi: *un item de tip alegere multiplă, un item de tip pereche, un item cu răspuns scurt, un item de completare, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme*, menționând pentru fiecare item competența/competențele evaluate.

Notă. Pentru fiecare dintre itemii elaborați se punctează menționarea competenței/competențelor evaluate, respectarea formatului itemului, elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) și corectitudinea științifică a informației de specialitate.