# Examenul de bacalaureat național 2020
## Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*

**Test 20**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

**5p** **1.** Arătați că numărul $A = z(2+3i)+\overline{z}(2-3i)$ este real, pentru orice număr complex $z$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui $z$.

**5p** **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+7$. Arătați că $f\left(\sqrt{2}\right)\cdot f\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot f\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\ldots\cdot f\left(10+\sqrt{2}\right)=0$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg\left(x^2+x-2\right)=1+\lg\frac{x-1}{2}$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor sale să fie mai mare decât $51$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(4,6)$, $B(-3.-1)$ și $C(-2,-2)$. Arătați că punctul $M(1,2)$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$.

**5p** **6.** Se consideră $R$, raza cercului circumscris triunghiului $ABC$ și $r$, raza cercului înscris în triunghiul $ABC$. Știind că $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{1}{rR}$, arătați că aria triunghiului $ABC$ este egală cu $1$.

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ 4 & 1 & m\\ 1 & -m & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+y+mz=4\\ 4x+y+mz=6\\ x-my-z=-1\end{cases}$, unde $m$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=2$.

**5p** **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui $m$ pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, soluția $(x_0,y_0,z_0)$ a sistemului de ecuații verifică relația $\frac{y_0}{z_0}=x_0$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$.

**5p** **a)** Arătați că $2*(-2)=0$.

**5p** **b)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

**5p** **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$. Arătați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

## SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$. |
| **5p** | **c)** Determinați imaginea funcției $f$. |
| | **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{\pi}{8}$. |
| **5p** | **b)** Pentru fiecare număr natural $n$, considerăm numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$. |
| **5p** | **c)** Determinați numărul real $a$, $a>0$, pentru care $\int_0^a x f(x)dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$. |