Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $z=\left(1-i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{2}\right)$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $f(x)+f(1-x)=7$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conțin pe 1.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-4,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta OM.

5p **6.** Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sin B=\cos B$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $A=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.

5p **a)** Arătați că $1*2020=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Determinați $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^3+1\right)f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.