Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ cu $a_1=2$ și rația $r=3$. Calculați a_3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați numerele reale x pentru care $f\left(x^2\right)=9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+2}-3^{2x}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al lui 100.

5p **5.** Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=36$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(A(a)-(12+a)I_2\right)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=4$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.