

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $a = 3 + 2\sqrt{2} + \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$ este natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. Arătați că $(f \circ f)(1) = f(2) + 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2} = 3 \cdot 3^x$.
- 5p 4. Determinați numărul natural nenul n , știind că mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ are exact 10 submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1, 0)$, $N(7, 0)$ și $A(a, 3)$, unde a este număr real. Știind că $AM = AN$, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5.
- 5p 6. Se consideră $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3 \cos x - 2 = 2 \cos 2x$. Calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2-a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & 2a-5 & a-2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + (2-a)y + az = 1 \\ ax + y + z = 2-a \\ ax + (2a-5)y + (a-2)z = -4 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 3$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a)) = (a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a .
- 5p c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \log_2(2^x + 2^y)$.
- 5p a) Arătați că $0 * 0 = 1$.
- 5p b) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $(x * x) * x = 3 + \log_2 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $m \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, ecuația $f(x) = m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x \cdot \frac{1}{f(x)} dx = \frac{31}{3}$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$, unde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \frac{1}{x^2 + 2x + 5}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_{-1}^1 x^{2n-1} f(x) dx$. Demonstrați că
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.