

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_st-nat**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- |           |  |
|-----------|--|
| <b>5p</b> | 1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că $a_2 = 3$ și $a_3 = 5$ .  |
| <b>5p</b> | 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x^2 - 1$ . Determinați numărul natural $n$ pentru care $f(n) = 3$ .  |
| <b>5p</b> | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 9} = x - 1$ .  |
| <b>5p</b> | 4. Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ .  |
| <b>5p</b> | 5. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $M(1, 1)$ , $N(3, 3)$ , $P(4, 3)$ și $Q(1, a)$ , unde $a$ este număr real. Determinați numărul real $a$ , pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele $MN$ și $PQ$ . |
| <b>5p</b> | 6. Calculați lungimea ipotenuzei $BC$ a triunghiului dreptunghic $ABC$ , în care $AB = 5$ și $\cos B = \frac{1}{2}$ .  |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- |           |   |
|-----------|---|
| <b>5p</b> | 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , unde $a$ și $b$ sunt numere reale.  |
| <b>5p</b> | a) Arătați că $\det(A \cdot A) = a^2 b^2$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$ .  |
| <b>5p</b> | b) Se consideră matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot X = X \cdot A$ . Demonstrați că, dacă $a$ și $b$ sunt numere reale distințe, atunci există numerele reale $x$ și $t$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ . |
| <b>5p</b> | c) Pentru $a = 4$ și $b = 0$ , determinați matricele $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y \cdot Y = A$ .  |
| <b>5p</b> | 2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compozиție $x * y = x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1}$ .  |
| <b>5p</b> | a) Arătați că $3 * 3 = 12$ .  |
| <b>5p</b> | b) Demonstrați că $x * 0 = 0 * x = x$ , pentru orice $x \in M$ .  |
| <b>5p</b> | c) Determinați $x \in M$ pentru care $(x^2 + 2x) * 3 = 7$ .   |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

- |           |   |
|-----------|---|
| <b>5p</b> | 1. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = x \ln(x+1)$ .  |
| <b>5p</b> | a) Arătați că $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ , $x \in (-1, +\infty)$ .  |
| <b>5p</b> | b) Arătați că funcția $f$ este convexă.   |
| <b>5p</b> | c) Se consideră funcția $g : (-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = (x+1)^x$ . Demonstrați că, dacă $x_1, x_2 \in (-1, 0]$ astfel încât $x_1 \leq x_2$ , atunci $g(x_1) \geq g(x_2)$ . |
| <b>5p</b> | 2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = 1 - x^3$ .  |
| <b>5p</b> | a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4}$ .  |
| <b>5p</b> | b) Arătați că $\int_0^1 x^2 (f(x))^3 dx = \frac{1}{12}$ .   |
| <b>5p</b> | c) Demonstrați că $\int_0^1 (f(x))^{n+1} dx \leq \int_0^1 (f(x))^n dx$ , pentru orice număr natural nenul $n$ .   |