

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică *M\_mate-info***  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Model

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$N = \log_2 6 - \log_2 9 + \log_2 24 = \log_2 \frac{6 \cdot 24}{9} =$ $= \log_2 16 = 4$ , care este număr natural	3p 2p
2.	$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$ Cum ecuația $x^2 - x = 0$ are două soluții reale și distincte, obținem că dreapta $y = 2$ intersectează graficul funcției $f$ în două puncte distincte	2p 3p
3.	$x^2 - 5 = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ $x = -1$ , care nu convine, $x = 4$ , care convine	2p 3p
4.	Mulțimea $A$ are $C_n^2$ submulțimi cu 2 elemente, unde $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$ , este numărul de elemente ale lui $A$ $C_n^2 = 15$ , deci $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ , de unde obținem că mulțimea $A$ are 6 elemente	2p 3p
5.	$M$ mijlocul lui $BC \Rightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$ $M$ mijlocul lui $NP \Rightarrow \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AN} + \overline{AP})$ , deci $\overline{AM} + \overline{AN} + \overline{AP} = 3\overline{AM} = \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$	2p 3p
6.	$2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x + \sin x) = 0$ Cum $x \in (0, \pi)$ , obținem $x = \frac{3\pi}{4}$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$A(0,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0,1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 4 - 2 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b,c)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & ac-bc & ab-bc \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & -c(b-a) & -b(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ , pentru orice numere reale $a, b$ și $c$	2p 3p
c)	$\det(A(m,n,p)) = (n-m)(p-m)(p-n)$ și, cum $m, n$ și $p$ sunt numere naturale, cu $m < n < p$ , obținem $p-m > p-n > 0$ și $p-m > n-m > 0$ Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim, obținem $p-n = n-m = 1$ , deci numerele $m, n$ și $p$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p 2p

<b>2.a)</b>	$f = X^4 + X^3 + \hat{2}X + \hat{2}$ , deci $f(\hat{0}) = \hat{2}$ și $f(\hat{2}) = \hat{0}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{0} = \hat{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f$ este divizibil cu $X + \hat{2} \Leftrightarrow f(\hat{1}) = \hat{0}$ , deci $a + b = \hat{0}$ Cum $a, b \in \mathbb{Z}_3$ , perechile sunt $(\hat{0}, \hat{0})$ , $(\hat{1}, \hat{2})$ și $(\hat{2}, \hat{1})$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$ , pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$ Dacă $f(\hat{0})$ , $f(\hat{1})$ și $f(\hat{2})$ ar fi distincte două câte două, atunci $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$ , ceea ce este fals, deci pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$ , există $x, y \in \mathbb{Z}_3$ , cu $x \neq y$ , astfel încât $f(x) = f(y)$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 2) - xe^{2x}}{(e^x + 2)^2} =$ $= \frac{e^{2x} + 2e^x + 2xe^x - xe^{2x}}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 2} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x - x(e^x + 2)}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x + 2} = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = e^x + 2x + 2$ este strict crescătoare și, cum $g$ este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , există un unic număr real $c$ , astfel încât $g(c) = 0$ $f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, c) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, c)$ și $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (c, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(c, +\infty)$ și, cum $f$ este continuă, obținem că $f$ are un unic punct de extrem	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 4x + 5} dx = \int_0^1 2(x+3) dx = (x^2 + 6x) \Big _0^1 =$ $= 1 + 6 - 0 - 0 = 7$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_0^1 (f^2(x) - 4) dx = \int_0^1 \frac{4(x+3)^2 - 4(x^2 + 4x + 5)}{x^2 + 4x + 5} dx = 4 \int_0^1 \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 5} dx =$ $= 4 \int_0^1 \frac{(x^2 + 4x + 5)'}{x^2 + 4x + 5} dx = 4 \ln(x^2 + 4x + 5) \Big _0^1 = 4 \ln 2$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	Cum $f^2(x) - 4 = \frac{4(2x+4)}{x^2 + 4x + 5} \geq 0$ și $f(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ , obținem $f(x) \geq 2$ , deci $f^n(x) \geq 2^n$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și orice număr natural nenul $n$ Cum $0 \leq a < b$ , $I_n = \int_a^b f^n(x) dx \geq 2^n(b-a)$ , pentru orice număr natural nenul $n$ și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ , obținem că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$	<b>2p</b> <b>3p</b>