Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că numărul $N=\log_2 6-2\log_2 3+\log_2 24$ este natural.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$. Arătați că dreapta de ecuație $y=2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3x-1}$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 15 submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P mijloacele segmentelor BC, BM, respectiv CM. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
5p	**6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+2\sin^2 x=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a,b,c)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\bc&ac&ab\end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(0,1,2)\right)=2$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det\left(A(a,b,c)\right)=(b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m<n<p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
	2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+\hat{2}X+b$, unde $a,b\in\mathbb{Z}_3$.
5p	**a)** Pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, arătați că $f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}$.
5p	**b)** Determinaţi perechile (a,b), cu $a,b\in\mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_3$, există $x,y\in\mathbb{Z}_3$, cu $x\neq y$, astfel încât $f(x)=f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+2x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}\,dx=7$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 \left(f^2(x)-4\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Se consideră numerele reale a şi b, cu $0\le a<b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=+\infty$.