

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ și $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$. Determinați numărul real x pentru care $f(x) = x$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|2x - 1| = 2x + 1$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară și cifra unităților impară.
- 5p** 5. Determinați numărul real a , pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{v} = 8\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. În triunghiul ABC dreptunghic în A , $BC = 12$ și $B = \frac{\pi}{6}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a-1 & 4a-4 \\ 1-a & 3-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p** c) Determinați numărul natural n , știind că $A(1) \cdot A(2) \cdot A(2^2) \cdot A(2^3) \cdot A(2^4) = A(32) \cdot A(-n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3x^2 - 5xy + 2y^2$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 2 = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $x \circ x = 0$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $2^x \circ 3^x = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = -1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $\sqrt{(x^2 + 1)^2 + 2(x^2 + 1)} + 2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 2} \leq (x-1)^2$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (4 - f^2(x)) dx = \pi$.

- 5p** | b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(\sqrt{2}-1)$.
- 5p** | c) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \ln(\sqrt{34} - \sqrt{17} + 4\sqrt{2} - 4)$.