

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

21 iulie 2021

Probă scrisă
MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|---|----------------|
| 1. | a) $f(x) = x^2 + 2x + 6$, deci $f(n) = 9 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 3 = 0$ Cum n este număr natural, obținem $n = 1$ | 3p 2p |
| | b) $f(x) = 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2k - 5 = 0$ Dreapta de ecuație $y = 4x + 5$ intersectează graficul funcției f în exact un punct dacă și numai dacă ecuația $x^2 - 2x + 2k - 5 = 0$ are exact o soluție număr real, deci $4 - 4(2k - 5) = 0$, de unde obținem $k = 3$, care convine | 2p 3p |
| | c) De exemplu, $f(k - 2) = (k - 2)^2 + 2(k - 2) + 2k = k^2 - 4k + 4 + 2k - 4 + 2k = k^2$ Deoarece $k - 2$ este număr natural, mulțimea numerelor naturale n pentru care numărul $f(n)$ este pătratul unui număr natural este nevidă | 3p 2p |
| 2. | a) ΔABC este dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$, deci $AD^2 = BD \cdot DC$ Cum punctul M este mijlocul segmentului AD , obținem $AD = 2MD$, deci $4MD^2 = BD \cdot DC$ | 3p 2p |
| | b) Punctul B' este simetricul punctului B față de dreapta $CM \Rightarrow$ semidreapta CM este bisectoarea unghiului BCB' , deci semidreapta CM este bisectoarea unghiului BCE Punctul C' este simetricul punctului C față de dreapta $BM \Rightarrow$ semidreapta BM este bisectoarea unghiului CBC' , deci semidreapta BM este bisectoarea unghiului CBE și, cum $BM \cap CM = \{M\}$, obținem că punctul M este centrul cercului înscris în triunghiul BCE | 2p 3p |
| | c) $MD = r$, unde r este raza cercului înscris în ΔBCE , deci $4r^2 = BD \cdot DC$ $BE = x$, $CE = y$, $BC = a$ și $p = \frac{1}{2}(x + y + a)$, deci $\mathcal{A}_{\Delta BCE} = pr = \sqrt{p(p - a)(p - x)(p - y)}$, de unde obținem $pr^2 = (p - a)(p - x)(p - y)$ $BD = p - y$ și $DC = p - x$, deci $p = 4(p - a) \Rightarrow 3p = 4a \Rightarrow x + y + a = \frac{8a}{3}$, de unde obținem $BE + CE = \frac{5}{3}BC$ | 1p 2p 2p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | | |
|----|---|----------|
| 1. | a) $g = X^4 - 13X^2 + 36 = (X^2 - 4)(X^2 - 9) =$ $= (X - 2)(X + 2)(X - 3)(X + 3)$, deci rădăcinile polinomului g sunt $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ și $x_4 = 3$ | 2p 3p |
|----|---|----------|

| | | |
|-----------|--|-----------------------------------|
| | <p>b) $f(x) = (x-3)(x-2)(x+2)(x+3) - 1$ Cum $x \geq 4$, obținem $x-3 \geq 1$, $x-2 \geq 2$, $x+2 \geq 6$ și $x+3 \geq 7 \Rightarrow f(x) \geq 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7 - 1$, deci $f(x) \geq 83$, pentru orice $x \in [4, +\infty)$</p> | <p>2p</p> <p>3p</p> |
| | <p>c) Dacă $f = h_1 h_2$, unde $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[X]$, de grad cel puțin 1, atunci $h_1(a)h_2(a) = f(a) = -1$, pentru orice $a \in \{-3, -2, 2, 3\}$ și, cum $h_1(a), h_2(a) \in \mathbb{Z}$, obținem că $h_1(a) = -h_2(a) \in \{-1, 1\}$, deci $h_1(a) + h_2(a) = 0$, pentru orice $a \in \{-3, -2, 2, 3\}$ Polinomul $h = h_1 + h_2$ are gradul cel mult 3 și $h(a) = 0$, pentru orice $a \in \{-3, -2, 2, 3\}$, deci $h = 0$, de unde obținem $h_1 = -h_2$, deci $f = -h_1^2$, ceea ce este imposibil, deoarece h_1 are coeficienți reali și $f(4) > 0$</p> | <p>2p</p> <p>3p</p> |
| 2. | <p>a) $f'(x) = \frac{(e^x + 1)x - (e^x + x + 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{xe^x - e^x - 1}{x^2} = -\infty$</p> | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| | <p>b) $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - 1}{x^2} < 0$, pentru orice $x \in (0, 1]$ f este strict descrescătoare pe $(0, 1]$, de unde obținem că $f(x) > f(1) = e + 2$, pentru orice $x \in (0, 1)$</p> | <p>2p</p> <p>3p</p> |
| | <p>c) $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{x}{e^x + x + 1} dx = \int_1^2 \frac{x + e^x + 1 - (e^x + 1)}{e^x + x + 1} dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{(e^x + x + 1)'}{e^x + x + 1} \right) dx =$ $= \left(x - \ln(e^x + x + 1) \right) \Big _1^2 = 1 - \ln \frac{e^2 + 3}{e + 2} = \ln \frac{e^2 + 2e}{e^2 + 3}$</p> | <p>3p</p> <p>2p</p> |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

| | |
|---|--|
| <p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |
| <p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |
| <p><i>Itemul de tip pereche elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare selectate - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - corectitudinea științifică a informației de specialitate | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> |

| | |
|--|---|
| <i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare selectate- respectarea formatului itemului- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)- corectitudinea științifică a informației de specialitate | 1p 1p 1p 1p 1p |
| <i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare selectate- respectarea formatului itemului- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)- corectitudinea științifică a informației de specialitate | 1p 1p 1p 1p 1p |
| <i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none">- menționarea competenței specifice evaluate- menționarea activității de învățare selectate- respectarea formatului itemului- elaborarea detaliată și corectitudinea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)- corectitudinea științifică a informației de specialitate | 1p 1p 1p 1p 1p |