

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$7 + \sqrt{7} \in (9, 10)$ și, cum n este număr natural, obținem $M = \{0, 1, 2, 3\}$ Mulțimea M are 4 elemente	3p 2p
2.	$\Delta = 36 - 4m \Rightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a} = m - 9$ $m - 9 > 0 \Leftrightarrow m \in (9, +\infty)$	3p 2p
3.	$x + 3 = (x - 3)^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$ $x = 1$, care nu convine; $x = 6$, care convine	3p 2p
4.	O mulțime cu 12 elemente are $C_{12}^0 + C_{12}^1 + C_{12}^2 = 1 + 12 + \frac{12 \cdot 11}{2} =$ $= 13 + 66 = 79$ de submulțimi cu cel mult 2 elemente	3p 2p
5.	Paralela prin A la OB intersectează paralela prin B la OA în punctul $C \Rightarrow OACB$ este paralelogram OC și AB au același mijloc, deci $x_O + x_C = x_A + x_B$, $y_O + y_C = y_A + y_B$, de unde obținem $x_C = 3$ și $y_C = 3$	2p 3p
6.	$\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} =$ $= \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-4) = 4$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 - a - b - ab & 2b + 2ab + 2a & 0 \\ -a - b - ab & 1 + 2a + 2b + 2ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a + b + ab \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 - (a + b + ab) & 2(a + b + ab) & 0 \\ -(a + b + ab) & 1 + 2(a + b + ab) & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (a + b + ab) \end{pmatrix} = A(a + b + ab)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p

c)	Cum $A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A(a+b+ab) \cdot A(c) = A(a+b+c+ab+ac+bc+abc)$, obținem $a+b+c+ab+ac+bc+abc=0$	3p
	$1+a+b+c+ab+ac+bc+abc=1 \Rightarrow (1+a)+b(1+a)+c(1+a)+bc(1+a)=1$, de unde obținem $(1+a)(1+b+c+bc)=1$, deci $(1+a)(1+b)(1+c)=1$	2p
2.a)	$3*4 = \sqrt{3^2+4^2} =$ $= \sqrt{25} = 5$	3p 2p
	b) $x*\sqrt{5} = \sqrt{x^2+5}, x \in M$ Cum $\sqrt{x^2+5} < x+1 \Rightarrow x^2+5 < x^2+2x+1$, obținem $x \in (2, +\infty)$	2p 3p
c)	Pentru $m=3k$ și $n=4k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, obținem $m*n=5k$	2p
	Cum numerele $3k, 4k$ și $5k$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m, n) , de forma $(3k, 4k)$, pentru care numerele m, n și $m*n$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} =$ $= 1 - \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{\sqrt{x^2-4x+5}-x+2}{\sqrt{x^2-4x+5}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
	b) $\sqrt{x^2-4x+5} = \sqrt{(x-2)^2+1} > x-2$, pentru orice număr real x $f'(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci f este strict crescătoare pe \mathbb{R}	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2-4x+5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2-4x+5})(x + \sqrt{x^2-4x+5})}{x + \sqrt{x^2-4x+5}} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-5}{x + \sqrt{x^2-4x+5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 - \frac{5}{x} \right)}{x \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \right)} = 2$, deci ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=2$	2p 3p
	2.a) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2+1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$	3p 2p
b)	$\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x (x^2+1) dx = e^x (x^2+1) \Big _0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = 2e - 1 - (2x-2)e^x \Big _0^1 =$ $= 2e - 1 - 2 = 2e - 3$	3p 2p
	c) $\int_{-1}^1 x \ln(f(x)) dx = \int_{-1}^0 (-x) \ln(x^2+1) dx + \int_0^1 x \ln(x^2+1) dx = \int_0^1 2x \ln(x^2+1) dx =$ $= \int_0^1 (x^2+1)' \ln(x^2+1) dx = (x^2+1) \ln(x^2+1) \Big _0^1 - \int_0^1 (x^2+1) \frac{2x}{x^2+1} dx = 2 \ln 2 - x^2 \Big _0^1 = 2 \ln 2 - 1$	2p 3p