

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)  
Matematică *M\_șt-nat*

Testul 1

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $a = 3 + 4\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3})^2$  este întreg.
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 4x^2 + 2x$ . Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor  $f$  și  $g$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x^2+4x+2} = 64 \cdot 2^x$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $a$  din mulțimea  $A = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$ , acesta să verifice inegalitatea  $\sqrt{a^2 - 2a + 1} \geq 3$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră paralelogramul  $MNPQ$  cu  $M(2,3)$ ,  $N(5,4)$  și  $P(4,0)$ . Determinați ecuația dreptei  $MQ$ .
- 5p 6. Triunghiul  $ABC$  este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că  $\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{1000}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1,0)) = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că, dacă  $a \in (-\infty, 0)$  și  $b \in (0, +\infty)$ , atunci matricea  $A(a,b)$  este inversabilă.
- 5p c) Determinați matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  pentru care  $A(1,3) \cdot X = A(2,1)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 3xy - (x + y) + \frac{2}{3}$ .
- 5p a) Arătați că  $1 \circ (-1) = -\frac{7}{3}$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Calculați  $1 \circ \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \circ \dots \circ \frac{1}{\sqrt{2021}}$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Demonstrați că dreapta de ecuație  $y = 2021$  este paralelă cu asimptota spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției  $f$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sin x$ .

5p a) Arătați că  $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x} dx = e(e-1)$ .

5p b) Calculați  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

5p c) Arătați că  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$ .