



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Clasa a VIII-a



Model subiect

Etapa I / Etapa a II-a

Timp de lucru: 120 de minute.

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

- 1.** Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < |2x - 5| \leq 7\}$. Atunci A este:
- A.** $[-1;6]$ **B.** $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ **C.** $[1;4]$ **D.** $[-1;1) \cup (4;6]$ **E.** $(-1,1] \cup [4,6)$
- 2.** Dacă $x \in [-1,2]$, atunci valoarea expresiei $E(x) = |x+1| + |x-2|$ este:
- A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4
- 3.** Dacă $a \in [-1,2]$ și $b \in [0,3]$ atunci numărul real $n = \sqrt{(a+b+1)^2} + \sqrt{(a+b-5)^2}$ are valoarea :
- A.** 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6 **E.** 7
- 4.** Dacă x este număr real nenul astfel încât $x + \frac{1}{x} = 10$, atunci $x^2 + \frac{1}{x^2}$ are valoarea:
- A.** 90 **B.** 98 **C.** 100 **D.** 102 **E.** 110
- 5.** Se consideră numărul real $n = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. Atunci:
- A.** $n \in \mathbb{N}$ **B.** $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ **C.** $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ **D.** $n \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ **E.** $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- 6.** Numărul real a verifică egalitatea $a^2 + 2a = 1$. Valoarea expresiei $E(a) = (a-1)(a-2)(a+3)(a+4)$ este:
- A.** 8 **B.** 10 **C.** 12 **D.** 14 **E.** 16
- 7.** Numărul de perechi (x,y) de numere naturale care verifică ecuația $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{20}$ este egal cu:
- A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5 **E.** 6
- 8.** Cardinalul mulțimii soluțiilor întregi ale ecuației $(x+y-xy)^2 = x^2 + y^2$, este:
- A.** 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0 **E.** ∞
- 9.** Fie $M = \{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p^2 + 2^{2p+1} - 53 = 2020^q, p \text{ număr prim}\}$. Cardinalul mulțimii M este:
- A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4

10. Cel mai mare divizor comun al numerelor $a = n^2 + 5n + 6$ și $b = n^2 + 7n + 12$, unde $n \in \mathbb{N}$, este:

- | | | | | |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------------------|
| A.
1 | B.
$n+2$ | C.
$n+3$ | D.
$n+4$ | E.
$(n+2)(n+3)(n+4)$ |
|----------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------------------|

11. Dacă a, b, c sunt numere reale nenule astfel încât $a+b+c=9$ și $ab+bc+ca=27$, atunci ultima cifră a numărului $a^{2020}+b^{2020}+c^{2020}$ este:

- | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| A.
0 | B.
1 | C.
3 | D.
9 | E.
10 |
|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|

12. Numărul numerelor întregi p care satisfac relația $p^2 - 6p \leq 9$ este:

- | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A.
6 | B.
7 | C.
8 | D.
9 | E.
7 |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|

13. Suma numerelor naturale x, y, z care verifică relațiile $x+y^2+z^3=1357$ și $x^3+y^2+z=37$ este:

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| A.
15 | B.
16 | C.
17 | D.
18 | E.
19 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|

14. Numărul de laturi ale unui poligon convex cu 275 de diagonale este:

- | | | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| A.
21 | B.
23 | C.
25 | D.
27 | E.
29 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|

Problemele **15** și **16** se referă la următorul enunț:

Fie $ABCD$ o piramidă triunghiulară regulată cu toate muchiile de lungime 12 cm.

15. Distanța de la punctul A la planul (BCD) este egală cu:

- | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|----------------|--------------------------|--------------------------|
| A.
$4\sqrt{2}$ | B.
$4\sqrt{3}$ | C.
8 | D.
$4\sqrt{5}$ | E.
$4\sqrt{6}$ |
|--------------------------|--------------------------|----------------|--------------------------|--------------------------|

16. Măsura unghiului dintre muchiile AB și CD este egală cu:

- | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| A.
30° | B.
45° | C.
60° | D.
90° | E.
0° |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|

Problemele **17-20** se referă la următorul enunț:

În piramida $OABC$, muchiile OA , OB și OC sunt perpendiculare două câte două. Muchiile laterale au lungimile $OA=a$ cm, $OB=b$ cm, $OC=c$ cm, unde a, b și c sunt numere reale strict pozitive, distincte.

17. Volumul piramidei $OABC$ este:

- | | | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|--|
| A.
$\frac{1}{2}abc$ | B.
$\frac{1}{3}abc$ | C.
$\frac{1}{6}abc$ | D.
$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2}$ | E.
$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{3}$ |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--|--|

18. Dacă S_1, S_2, S_3 și S_4 sunt ariile triunghiurilor OAB, OBC, OAC , respectiv ABC , atunci:

- | | | | | |
|--|--|--------------------------------------|--|--|
| A.
$S_4 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}$ | B.
$S_4 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{2}$ | C.
$S_4 = S_1 + S_2 + S_3$ | D.
$S_4^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{2}$ | E.
$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ |
|--|--|--------------------------------------|--|--|

19. Dacă $OP \perp (ABC)$, $P \in (ABC)$, atunci, pentru triunghiul ABC , punctul P reprezintă:

- | | | | | |
|---|---|---------------------------------------|--|--|
| A.
centrul cercului înscris în triunghi | B.
centrul cercului circumscris | C.
ortocentrul triunghiului | D.
centrul de greutate al triunghiului | E.
mijlocul unei laturi a triunghiului |
|---|---|---------------------------------------|--|--|

20. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC . Valoarea minimă a expresiei $MA^2 + MB^2 + MC^2$ este:

- | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|---|-----------------------------|---------------------------------------|
| A.
$a^2 + b^2 + c^2$ | B.
$2(a^2 + b^2 + c^2)$ | C.
$\frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3}$ | D.
$ab + bc + ca$ | E.
$\frac{ab + bc + ca}{2}$ |
|--------------------------------|-----------------------------------|---|-----------------------------|---------------------------------------|

Problemele **21-24** se referă la următorul enunț:

În cubul $ABCA_1B_1C_1D_1$, de muchie $AB = \ell$ cm, se notează cu S , T , R și N mijloacele muchiilor AB , DD_1 , DC și respectiv B_1C_1 .

21. Fie M punctul de intersecție al dreptelor RT și C_1D_1 . Dacă U este mijlocul segmentului $[MN]$ și a este un număr real astfel încât $TU = a \cdot RN$, atunci valoarea lui a este:

- | | | | | |
|----------------|----------------|----------------------------|----------------|-------------------------|
| A.
1 | B.
2 | C.
$\frac{1}{2}$ | D.
0 | E.
$\sqrt{2}$ |
|----------------|----------------|----------------------------|----------------|-------------------------|

22. Lungimea segmentului $[TS]$ este:

- | | | | | |
|------------------------|-----------------------------------|--|--|--|
| A.
ℓ cm | B.
$\frac{1}{2}\ell$ cm | C.
$\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$ cm | D.
$\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ cm | E.
$\frac{\sqrt{6}}{2}\ell$ cm |
|------------------------|-----------------------------------|--|--|--|

23. Dacă $[U_1S_1]$ este proiecția segmentului $[US]$ pe planul (DCC_1) , atunci lungimea segmentului $[U_1S_1]$ este:

- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A.
$\frac{\sqrt{13}}{2}\ell$ cm | B.
$\frac{\sqrt{17}}{2}\ell$ cm | C.
$\frac{3\sqrt{2}}{2}\ell$ cm | D.
$\frac{\sqrt{17}}{4}\ell$ cm | E.
$\frac{3\sqrt{2}}{4}\ell$ cm |
|---|---|---|---|---|

24. Cosinusul unghiului dintre dreptele TS și RN este:

- | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| A.
$\frac{1}{3}$ | B.
$\frac{1}{4}$ | C.
$\frac{1}{6}$ | D.
$\frac{12}{13}$ | E.
$\frac{5}{6}$ |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------------------|