Olimpiada Națională
GAZETA MATEMATICĂ
Clasa a XI-a

Model subiect

Etapa I

Timp de lucru: 120 de minute.
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct.

Alegeți varianta corectă de răspuns. O singură variantă este corectă.

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}$. Calculați ${}^t(AB)-{}^tB\cdot{}^tA$.

A. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; **B.** $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ **C.** $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ **D.** $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&4\\0&1\end{pmatrix}$ și $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci:

A. $A^n=\begin{pmatrix}1&4n\\0&1\end{pmatrix}$ **B.** $A^n=\begin{pmatrix}1&4^n\\0&1\end{pmatrix}$ **C.** $A^n=\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\0&1\end{pmatrix}$ **D.** $A^n=\begin{pmatrix}1&n+4\\0&1\end{pmatrix}$

3. Soluția ecuației $2X^7+X^3=\begin{pmatrix}3&0\\17&3\end{pmatrix}$ este:

A. $X=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ **B.** $X=\begin{pmatrix}2&0\\-3&2\end{pmatrix}$ **C.** $X=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ **D.** $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

4. Numărul elementelor mulțimii $\left\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,\middle|\,\mathrm{Tr}\left(A\cdot{}^tA\right)=0\right\}$ este egal cu:

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** o infinitate

5. Determinați numărul de soluții reale și distincte ale ecuației $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&x&x^2\\4&x^2&x^4\end{vmatrix}=0$.

A. 1 **B.** 0 **C.** 5 **D.** 3

6. Se consideră determinatul $D=\begin{vmatrix}a-1&a+1&a^2-1\\b-1&b+1&b^2-1\\c-1&c+1&c^2-1\end{vmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Atunci:

A. $D=a+b+c$ **B.** $D=1$ **C.** $D=(a+b+c)^2$ **D.** $D=-2(a-b)(b-c)(c-a)$

7. Determinați $m\in\mathbb{C}$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}2m+1&1\\3&m-2\end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

A. $m\in\left\{-1,\frac{5}{2}\right\}$ **B.** $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ **C.** $m\in\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$ **D.** $m=0$

8. Numerele $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}2&2&b&1\\1&a&8&3\\3&2&10&2\end{pmatrix}$ are rangul minim sunt:

A. $a=-4, b=6$ **B.** $a=1, b=-6$ **C.** $a=2, b=3$ **D.** $a=-4, b=2$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n(2n+1)-(3n+1)(4n-5)}{2n^2+3n+1}$ este egală cu:

A. -3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 5

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)^{n-1}$ este egală cu:

A. $\frac{1}{\sqrt{e}}$ **B.** e^2 **C.** 1 **D.** ∞

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$ este egală cu:

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{4}$

12. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{4n+3}-\sqrt{9n+5}\right)$ este:

A. $\frac{5}{12}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 0

13. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2\cdot 2}{n^4+n}+\frac{2^2\cdot 3}{n^4+2n}+\frac{3^2\cdot 4}{n^4+3n}\ldots+\frac{n^2(n+1)}{n^4+n^2}\right)$ este:

A. $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** ∞ **D.** 0

14. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!\cdot(2n-1)!}{(5n+4)!}\cdot n^2$ este:

A. 0 **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** ∞

15. Numerele reale a și b verifică relația $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+3}+an+b\right)=1$. Atunci:

A. $a+b^2=0$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a^2+b^2=4$ **D.** $a\cdot b=2$

16. Fie p un număr natural nenul. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)$ este:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{p}{2}$ **C.** $-p$ **D.** $\frac{1}{C_p^2}$

Problemele **17-18** se referă la următorul enunț:

Se consideră șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1>1$ și $a_{n+1}=a_n+\frac{n}{a_n}$, $n\geq 1$.

17. Stabiliți care dintre afirmațiile următoare este **falsă**:

A. $a_n<n$, $\forall n\geq 3$ **B.** $a_n>2\sqrt{n}$, $\forall n\geq 2$;

C. $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător; **D.** $(a_n)_{n\geq 1}$ este divergent;

18. Stabiliți care dintre afirmațiile următoare este **adevărată**:

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$; **B.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$ **C.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ **D.** $\left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ nu are limită

Problemele **19-20** se referă la următorul enunț:

Se consideră mulțimea $G=\left\{M(a)=\begin{pmatrix}-a+1 & 3a \\ 3a & -9a+1\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$.

19. Dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci $M(a)\cdot M(b)$ este:

A. $M(a+b-10ab)$ **B.** $M(a+b-3ab)$ **C.** $M(a+b)$ **D.** $M(a+b+3ab)$

20. Se consideră mulțimea $X=\left\{U\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| A\cdot U=U, \text{pentru orice } A\in G\right\}$. Atunci:

A. $\operatorname{card}X=1$ și $X\subset G$; **B.** $\operatorname{card}X=1$ și $X\not\subset G$; **C.** $\operatorname{card}X\geq 2$; **D.** $X=\varnothing$.