Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=1+12i+36i^2+9-12i+4i^2=$	**2p**
	$=1-36+9-4=-30$, care este număr întreg negativ	**3p**
2.	$f(1)=f(5)\Rightarrow 1+a=25+5a\Rightarrow a=-6$	**2p**
	$f(x)=x^2-6x$, de unde obținem $f(2)=-8$ și $f(4)=-8$, deci $f(2)=f(4)$	**3p**
3.	$2x^2-2=(x+1)^2\Rightarrow x^2-2x-3=0$	**2p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=3$, care convine	**3p**
4.	Există 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Dacă cifra unităților este c, $1\le c\le 9$, atunci cifra sutelor poate fi aleasă în c moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor există o singură alegere a cifrei zecilor; în total sunt $9+8+\ldots+1=45$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{900}=\dfrac{1}{20}$	**1p**
5.	$OA=OB=5$	**2p**
	$m_{AO}=\dfrac{4}{3}$ și $m_{BO}=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow AO\perp BO$ și, cum $AOBC$ este paralelogram, obținem că $AOBC$ este pătrat, deci triunghiul ACB este dreptunghic isoscel	**3p**
6.	$2\sin^2 x=1\Rightarrow \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sau $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	Cum $x\in(0,\pi)$, obținem $\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, deci $x=\dfrac{\pi}{4}$ sau $x=\dfrac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&3\\1&1&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=8+4+9-8-6-6=1$	**3p**
b)	$A(a)A(1)=\begin{pmatrix}3a+3&5a+4&7a+5\\6&9&12\\2+a&4+a&6+a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(1)A(a)=\begin{pmatrix}a+5&a+8&4a+8\\a+5&a+8&4a+8\\a+2&a+4&2a+5\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a, deci $A(a)A(1)=A(1)A(a)$ implică $a=1$, care convine	**3p**

c)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	Cum $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, matricea $A(a)$ are rangul doi $\Leftrightarrow a=1$	**2p**
2.a)	$\hat{3}\circ\hat{3}=\hat{3}\cdot\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=$	**2p**
	$=\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=\hat{3}$	**3p**
b)	$x\circ\hat{0}=x\cdot\hat{0}+x+\hat{0}=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$	**2p**
	$\hat{0}\circ x=\hat{0}\cdot x+\hat{0}+x=x$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_6$, deci $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**
c)	$\hat{4}\circ\hat{4}=\hat{0}\Rightarrow\hat{4}$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$” și simetricul lui este $\hat{4}$	**2p**
	$f(x)=f(y)\Rightarrow\hat{4}\circ x=\hat{4}\circ y\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ este injectivă, de unde obținem că $\operatorname{Im} f$ are 6 elemente, deci $\operatorname{Im} f=\mathbb{Z}_6$, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{2}{(x+1)^3}=$	**3p**
	$=\dfrac{2\left((x-1)^3-(x+1)^3\right)}{(x+1)^3(x-1)^3}=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{(x+1)^3(x-1)^3}=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$	**2p**
b)	Cum $f(0)=0$, graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul $O(0,0)$	**2p**
	$f'(0)=4$, deci ecuația tangentei este $y=4x$	**3p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(4)+\ldots+f(2n)\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)^n=$	**2p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{(2n+1)^2}\right)^{-(2n+1)^2}\right)^{\frac{-n}{(2n+1)^2}}=e^0=1$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=\int_0^2(2x-2)\,dx=\left(x^2-2x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=4-4=0$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+4}dx-2\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+4}dx=\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_0^{2\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big\vert_0^{2\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\ln 16-\ln 4-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=2\ln 2-\dfrac{\pi}{3}$	**2p**
c)	Funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ este derivabilă și $F'(x)=f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow F$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ și $F'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow F$ este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow F(x)\geq F(1)$, pentru orice număr real x, de unde obținem că $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt\geq 0$, pentru orice număr real x	**3p**