

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Testul 4**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = \frac{(2a_1 + 6r) \cdot 7}{2} = \frac{(2 \cdot (-5) + 6 \cdot 8) \cdot 7}{2} =$ $= 133$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>2.</b>	$\Delta = 1 - 4a(-a - 1) = (2a + 1)^2$ $\Delta > 0 \Rightarrow a \neq -\frac{1}{2} \text{ și, cum } a \text{ este număr real nenul, obținem } a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = x \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0$ $x = -3 \text{ sau } x = 3$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	$5A_3^2 - 3C_5^3 = 5 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} - 3 \cdot \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} =$ $= 5 \cdot 6 - 3 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 30 - 30 = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$\frac{2}{5} = \frac{m}{-m^2 - 1} \Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0$ $m = -2 \text{ sau } m = -\frac{1}{2}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>6.</b>	$A_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} \Rightarrow 15 = \frac{6 \cdot 10 \cdot \sin C}{2} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2}$ Cum $AB > BC > AC$ , unghiul $C$ are măsura cea mai mare dintre unghiurile $\Delta ABC$ , deci unghiul $C$ are măsura de $150^\circ$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 =$ $= -1 + 1 = 0$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ $M(a, b) \cdot M(x, y) = (aI_2 + bA)(xI_2 + yA) = axI_2 + ayA + bxA + ybA \cdot A = axI_2 + (ay + bx)A =$ $= M(ax, ay + bx)$ , pentru orice numere reale $a, b, x$ și $y$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>c)</b>	$B = xI_2 + 2yA + yI_2 + 2xA = M(x + y, 2(x + y))$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ Cum $C = M(2xy, \sqrt{2}(x + y))$ , obținem că $x + y = 2xy = 0$ , deci $x = y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$(1 * 2) \circ (1 * 3) = (2 + 2 + 4 + 2) \circ (3 + 2 + 6 + 2) = 10 \circ 13 = 10 + 13 + 2 = 25$ $1 * (2 \circ 3) = 1 * (2 + 3 + 2) = 1 * 7 = 7 + 2 + 14 + 2 = 25$ , deci $(1 * 2) \circ (1 * 3) = 1 * (2 \circ 3)$	<b>3p</b> <b>2p</b>

<b>b)</b>	$x \circ (-2) = (-2) \circ x = x$ , pentru orice număr real $x$ , deci $e = -2$	<b>2p</b>
	$x * e = x * (-2) = -2x + 2x + (-4) + 2 = -2 = e$ , pentru orice număr real $x$	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$n * (-n) = 2 - n^2$ , $n \circ (-n) = 2$ , pentru orice număr natural $n$	<b>2p</b>
	$2 - n^2 \geq 2 \Leftrightarrow n^2 \leq 0$ , deci $n = 0$	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}) = 0$ , $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x+1)) = 0$ și $f(0) = 0$ , deci	<b>3p</b>
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , de unde obținem că $f$ este continuă în $x = 0$ Cum $f$ este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ , obținem că $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	Pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$ și $f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$	<b>3p</b>
	$f''(x) > 0$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $f$ este convexă pe $(0, +\infty)$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	Dacă $a \in (-\infty, 0)$ , atunci panta tangentei la graficul funcției $f$ în punctul $A(a, f(a))$ este	<b>2p</b>
	$f'(a) = 1 + \frac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}}$ Cum $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-a+1} = 1-2a \Leftrightarrow 4a^2-4a+4 = 4a^2-4a+1$ , ceea ce este imposibil, obținem că, pentru orice număr real $a$ , $a < 0$ , tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $A$ nu este paralelă cu axa $Ox$	<b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$	<b>3p</b>
	$= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2} = g(x)$ , pentru orice $x \in (0, +\infty)$ , deci funcția $f$ este o primitivă a funcției $g$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_{\frac{1}{4}}^4 g(x) dx = f(x) \Big _{\frac{1}{4}}^4 = f(4) - f\left(\frac{1}{4}\right) =$	<b>3p</b>
	$= \frac{15}{4} + 3 = \frac{27}{4}$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_m^1 f^2(x) \cdot g(x) dx = \int_m^1 f^2(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{3} f^3(x) \Big _m^1 = \frac{1}{3} (f^3(1) - f^3(m))$	<b>3p</b>
	Cum $f(1) = 1$ , obținem $f(m) = 0$ , deci $m = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ , care convine	<b>2p</b>