Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=-5$ și rația $r=8$.

5p **2.** Determinați valorile reale nenule ale lui a pentru care ecuația $ax^2-x-a-1=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3x-\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=2x$.

5p **4.** Calculați $5A_3^2-3C_5^3$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{b}=5\vec{i}-\left(m^2+1\right)\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB>BC$, $AC=6$, $BC=10$ și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a,b)=aI_2+bA$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a,b)\cdot M(x,y)=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B=M(x,2y)+M(y,2x)$ și $C=M\left(x\sqrt{2},1\right)\cdot M\left(y\sqrt{2},1\right)$ sunt egale, atunci $x^2+y^2=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=xy+2x+2y+2$ și $x\circ y=x+y+2$.

5p **a)** Arătați că $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ 3)$.

5p **b)** Demonstrați că $x*e=e$, pentru orice număr real x, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*(-n)\geq n\circ(-n)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0)\\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1+x\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m \in (0,1)$, pentru care $\int_{m}^{1} f^2(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{3}$.