Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2-\lg 40\right)\cdot\dfrac{1}{\lg^2 5-\lg^2 2}=1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x-m^2+1=0$ este număr real strict mai mic decât 0.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x}=4^{2x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)!-n!\le n+2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Determinați numerele reale a, $a>-2$, știind că a^2+1 și $a+2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{a}\\ 1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(4)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(a)\cdot A(1)-A(a+1)\right)>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că matricea $B(n)=A\left(1^2\right)+A\left(2^2\right)+A\left(3^2\right)+\ldots+A\left(n^2\right)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{3}(xy+4)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $3^1\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-\operatorname{arctg} x, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{5x}{x^2+x+4}, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)\,dx=16$.

5p **b)** Calculați $\int_1^3 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.