Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$1<\sqrt[3]{7}<2$ și $4<\log_2 21<5$, deci $A=\{2,3,4\}$	**3p**
	Produsul elementelor mulțimii A este egal cu 24	**2p**
2.	$f(x)=y \Leftrightarrow x^2+4x=5x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d sunt $x=-1$ și $x=2$	**2p**
3.	$2\cdot 3^{2x}-3^{2x}-3=0 \Leftrightarrow 3^{2x}=3$	**3p**
	$2x=1$, deci $x=\frac{1}{2}$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre, care au cifrele numere prime distincte, are $4\cdot 3\cdot 2=24$ de elemente, deci sunt 24 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{24}{900}=\frac{2}{75}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$	**3p**
	$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$, deci $AMBC$ este paralelogram	**2p**
6.	$\cos^2 x=1-\sin^2 x=\frac{225}{289}$	**2p**
	Cum $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=-\frac{15}{17}$, deci $\operatorname{tg} x=\frac{8}{15}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&-1&-2\\0&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}3&1&2\\1&-1&-2\\0&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+2+0-0-(-6)-1=4$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2+a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații nu este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, deci $a=-2$ sau $a=1$	**3p**
c)	Sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ și $x_0=\frac{5}{a+2}$	**3p**
	$x_0\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (a+2)\mid 5$ și, cum $a\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, obținem $a=3$	**2p**
2.a)	$1*5=1+5-\frac{1\cdot 5}{5}=$	**3p**
	$=1+5-1=5$	**2p**

b)	$\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{x}{5}=5 \Leftrightarrow 10\sqrt{x}=25+x$, unde x este număr real, $x\geq 0$	**2p**
	$\left(\sqrt{x}-5\right)^2=0$, de unde obținem $x=25$	**3p**
c)	$x*0=0*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$a*a'=0 \Leftrightarrow 5a+5a'-aa'=0 \Leftrightarrow a'(a-5)=5a$, deci $a'=\frac{5a}{a-5}$, pentru orice număr real a, $a\neq 5$, unde a' este simetricul lui a	**3p**
	$\frac{5a}{a-5}<0 \Leftrightarrow a\in(0,5)$	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\ln(x+1)+(x-1)\cdot\frac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=\ln(x+1)+\frac{x+1-2}{x+1}=1+\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{(x-1)^2}{x}\ln(x+1)\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right)=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{(x-1)^2}{x^2}\ln(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)=-\infty$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{x+3}{(x+1)^2}>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p**
	f' este injectivă pe $(0,+\infty)$, deci $f'(a)\neq f'(b)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$, cu $a\neq b$, de unde obținem că tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(b,f(b))$ sunt concurente, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$, cu $a\neq b$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx=\int_1^2 3x^2dx=x^3\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{9x^2}{x+1}dx=9\int_0^1\frac{x^2-1+1}{x+1}dx=9\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=9\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=9\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2-0\right)=9\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$	**2p**
c)	$\int_0^3 f(x)F(x)dx=\int_0^3 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(F^2(3)-F^2(0)\right)=\frac{1}{2}\left(8^2-0^2\right)=32$	**2p**