

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați produsul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{7} < x \leq \log_2 21\}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta d de ecuație $y = 5x + 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 9^x - 3^{2x} - 3 = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.
- 5p** 5. Se consideră punctul M în planul triunghiului ABC astfel încât $2\overline{MB} - \overline{MC} = \overline{AB}$. Arătați că patrulaterul $AMBC$ este paralelogram.
- 5p** 6. Calculați $\operatorname{tg} x$, știind că $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x = -\frac{8}{17}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -a \\ 2-a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} (a+1)x + y + az = -5 \\ x - y - az = 10 \\ (2-a)x + y + z = 1-a \end{cases}$,

unde a este număr real.

- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 4$.
- 5p** b) Determinați numerele reale a pentru care sistemul de ecuații **nu** este compatibil determinat.
- 5p** c) Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluția unică (x_0, y_0, z_0) și x_0 este număr întreg.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x * y = x + y - \frac{xy}{5}$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 5 = 5$.
- 5p** b) Determinați numărul real x , $x \geq 0$, pentru care $\sqrt{x} * \sqrt{x} = 5$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui a , $a \neq 5$, pentru care simetricul lui a în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” este strict mai mic decât 0.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\ln(x+1)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = 1 + \ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.
- 5p** c) Demonstrați că orice două drepte distincte, tangente la graficul funcției f , sunt concurente.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+1}}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 x\sqrt{x+1}f(x)dx = 7$.

5p b) Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

5p c) Știind că $F : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2(x+1)\sqrt{x+1} - 6\sqrt{x+1} + 4$ este o primitivă a funcției f , arătați că $\int_0^3 f(x)F(x)dx = 32$.