

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați media geometrică a numerelor $x = \log_6 8 + \log_6 27$ și $y = \sqrt{2^2 \cdot 3^3 + 6^2}$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + a$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2} = 7^{2x-1}$.
- 5p** 4. Arătați că produsul numerelor A_5^2 , C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, a+1)$, $B(2, -3)$ și $C(3, 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A , B și C sunt coliniare.
- 5p** 6. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP , dreptunghic în N , știind că $MN = 12$ și $NP = 16$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -a \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - az = 1 \\ x + ay - z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = -3$.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0, y_0, z_0) astfel încât $x_0 = \frac{y_0}{2} = \frac{z_0}{3}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 27}$.
- 5p** a) Arătați că $2021 * (-2021) = -3$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x) * f(y) = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^6 + 7}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{-3x^2(x^3 - 1)(x^3 + 7)}{(x^6 + 7)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați asimptotele graficului funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $|f(x) - f(y)| \leq \frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{e^{2x}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{e^{3x} f(x)}{2x+1} dx = e - 1$.

5p b) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

5p c) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{e-1}{2e^2}$.